

Notes on Groupoids

FE enthusiast enthusiast

2025.08.21

之前听说 van kampen 定理有个利用 groupoid 的解释, 然后又想起之前有学长推荐过 May 的代数拓扑, 就去看了一些相关内容, 并且顺便也学习了 covering space 的另一种讲述方法, 个人觉得相当有意思! 在搜索 groupoid 相关内容的时候也了解到了另一本好书: Ronald Brown 的 Topology and Groupoids. 这本书似乎知名度很低, 但是它基本 cover 了一般本科《拓扑学》这门课会教的所有内容, 并且还引入了 cell complex, k -space, (co)fibration 这种相当有启发性的概念, 不过终究是回不到以前, 也没有时间看完这 500 多页的书, 没法预知第一次学的时候看这本书会不会对一些事情感受更深……Especially 这种方法可以利用 Van Kampen 定理来给出 $\pi_1(S^1)$, 也算是另一种方式的“圆梦”. 所以一定要写一篇笔记来记录一下.

Category and Homotopy

我们仍然用 $\mathbf{Set}, \mathbf{Top}, \mathbf{Top}_\bullet, \mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}$ 来表示集合, 拓扑空间, 带基点拓扑空间, 群, Abel 群的范畴. 我们知道范畴之间有函子, 函子和函子之间有自然变换, 实际上, 自然变换可以看作某种单向的“范畴同伦”.

Proposition 1.1.1. 设 f_0, f_1 是 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 的函子. 设 $\mathcal{J}$ 是有两个对象 $0, 1$, (除去恒等态射外还有一个态射 $\iota: 0 \rightarrow 1$ 的范畴. 那么一个从 f_0 到 f_1 的自然变换 (natural transformation) 意谓函子

$$F: \mathcal{C} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D},$$

使得 $F(\cdot, 0) = f_0$, $F(\cdot, 1) = f_1$, 我们记作 $f_0 \xRightarrow{F} f_1$.

从另一个角度来说, F 完全由所有 $F(X, \cdot)$ 确定. 这是一个 $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$ 的函子, 它包含 $f_0 X, f_1 X$ 以及态射 $\theta_X: f_0 X \rightarrow f_1 X$. 当确定 f_0, f_1 时, 确定一个自然变换只是确定了所有 θ_X , 并且为了使 F 成为一个 $\mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}]$ 的函子, θ_X 需要满足相容性条件: 对任意 $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ 和 $\alpha \in \mathbf{Hom}(X, Y)$. 有

$$\begin{array}{ccc} f_0 X & \xrightarrow{f_0 \alpha} & f_0 Y \\ \theta_X \downarrow & & \downarrow \theta_Y \\ f_1 X & \xrightarrow{f_1 \alpha} & f_1 Y \end{array}$$

这就得到了一般的“自然变换”的定义，所以我们也把自然变换记作 $f_0 \xRightarrow{\theta} f_1$. 而只要把 $\mathcal{J}$ 的定义中的 ι 设为可逆态射，即把范畴 $\mathcal{J}$ 换为

$$\mathcal{J}: 0 \xrightleftharpoons[\iota^{-1}]{\iota} 1$$

重复上面的定义方式，称两个函子 f_0, f_1 是**同伦**（自然同构）的如果存在函子 F 使得下述图表交换.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\iota_0} & \mathcal{C} \times \mathcal{D} & \xleftarrow{\iota_1} & \mathcal{C} \\ & \searrow f_0 & \downarrow F & \swarrow f_1 & \\ & & \mathcal{D} & & \end{array}$$

记为 $f_0 \simeq f_1$. 函子同伦关系也可以理解为为每个 $X \in \mathcal{C}$ 选择可逆的 $\theta_X \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(f_0 X, f_1 X)$ 使得上面图表交换. 但这告诉了我们更多的信息:

- $f_0 X$ 和 $f_1 X$ 作为 $\mathcal{D}$ 中的对象是同构的，这个同构就是 θ_X . 而范畴论中的一个基本原理是：同构的对象会具有相同的性质.
- 进一步地， θ 诱导了态射集 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(f_0 X, f_0 Y)$ 和 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(f_1 X, f_1 Y)$ 之间的同构，只需把 $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(f_0 X, f_0 Y)$ 打到 $\theta_Y \alpha \theta_X^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(f_1 X, f_1 Y)$ 即可.
- 反之，如果对每个 X 都存在从 $f_0 X$ 到 $f_1 X$ 的同构，还不足以完全得到 $f_0 \simeq f_1$. 但是如果固定 f_0 和 θ ，我们可以选定唯一建构出函子 f_1 满足

$$\begin{aligned} f_1 X &= \tau_X(f_0 X), \quad X \in \mathcal{C}; \\ f_1 \alpha &= \tau_Y(f_0 \alpha) \tau_X^{-1}, \quad X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y). \end{aligned}$$

容易通过交换图表论证 f_1 确是一个函子，并且 $f_0 \simeq f_1$.

类似拓扑空间中的情形，我们可以自然地定义范畴等价.

Definition 1.1.2 (范畴等价). 我们称 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是一个**范畴等价** (equivalence), 如果存在在函子 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得

$$GF \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}, \quad FG \simeq \text{id}_{\mathcal{D}}.$$

这时我们也说范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是**范畴等价** (equivalent) 的.

一个函子是否是范畴等价，和拓扑空间中的同伦等价一样是比较难验证的条件. 于是我们有“形变收缩” (deformation retraction) 的概念来更具体地给出一些同伦等价的拓扑空间，在范畴里也能做类似的事情. 它们的定义也非常地标准：把子空间，收缩，形变收缩这样的定义全部范畴化即可.

Definition 1.1.3 (收缩与形变收缩). 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的子范畴（子范畴的定义自明：就是维持结构，保持运算封闭）并有自然的包含函子 $i: \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$. 若存在 $r: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 使得 $r \circ i = \text{id}$, 那么称 r 是从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的**收缩**.

进一步地，如果 r 是收缩并且 $i \circ r \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$, 那么称 r 是从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的**形变收缩**.

Remark. 事实上在任意范畴 $\mathcal{C}$ 里都可以定义“收缩”，只要某个 $r \in \text{Hom}(X, Y)$ 满足存在 $i \in \text{Hom}(Y, X)$ 使得 $r \circ i = \text{id}_Y$ ，就称 i 是单射而 r 是收缩映射，上面的定义实际上就是取 $\mathcal{C} = \text{Cat}$ 的结果（我们暂时忽略所有集合论上的困难）。但是未必所有范畴里都能定义“形变收缩”，这需要范畴里可以定义同伦。

显然如果 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的形变收缩，那么 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$ 范畴等价。与拓扑空间情况不同的是， $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的形变收缩有一个很好的等价命题。

Proposition 1.1.4. 我们称 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{D}$ 是**完全的** (full subcategory)，如果对 $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. (从而确定了有哪些对象就确定了整个子范畴) 称 $\mathcal{D}$ 是**代表子范畴** (representative subcategory)，如果 $\mathcal{C}$ 中的任意对象都在 $\mathcal{D}$ 中找到同构的对象。

那么 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的形变收缩当且仅当 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的完全代表子范畴。

Proof. 如果 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的形变收缩，那么存在 $r: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 使得

$$ri = \text{id}_{\mathcal{D}}, \quad ir \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}.$$

因此对任意 $X \in \mathcal{C}$ 均有 $(ir)X \simeq X$, $(ir)X$ 可以看作子范畴中的对象，从而 $\mathcal{D}$ 是代表范畴。又因为对任意 $X, Y \in \mathcal{D}$,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(iX, iY) \xrightarrow{r} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \xrightarrow{i} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(iX, iY)$$

两个映射复合后为同构，所以 r 是单射并且 i 是满射。又因为 i 是单射，所以 i 也是同构，因此 $\mathcal{D}$ 是完全子范畴。

另一方面，如果 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的完全代表子范畴，那么为每个 $X \in \mathcal{C}$ 选取对象 $rX \in \mathcal{D}$ 及同构 $\theta_X: X \rightarrow rX$. 对 $X \in \mathcal{D}$ ，我们规定选择的 $rX = X$ 以及 $\theta_X = \text{id}_X$. 然后为每个态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 定义 $rf = \theta_X^{-1}f\theta_Y$. 容易验证 r 的确是 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 的函子，并且 $ir \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$ 也是明显的。 

Remark. 我们有时候对 $X \in \mathcal{D}$ 会混淆 X 和 iX ，即把 X 直接视为 $\mathcal{C}$ 中的对象，这在大部分时候不影响理解。

关键在于，在该命题的证明中， rX 能够选择**任何**与 X 同构的对象，而 θ_X 也能选择不同的同构态射，所以 r 绝不是唯一的，在某些条件下可以选择满足好的性质的 r 。

根据上面的命题，对任意范畴 $\mathcal{C}$ 我们都可以考虑其**同构类**，然后在每个同构类中选取一个对象并生成一个完全子范畴。这个子范畴被称为 $\mathcal{C}$ 的**骨架** $\text{sk } \mathcal{C}$ ，那么 $\text{sk } \mathcal{C} \simeq \mathcal{C}$. 直观来说，它具有比 $\mathcal{C}$ 更少的对象，就像是把 $\mathbb{R}^n$ 形变收缩为单点集一样，其结构会更简单。

Colimits and Pushouts

初学李文威时候不知道为什么泛性质与 (co)limit 的定义如此复杂，现在感觉有那么点理解了. 我们在利用泛性质定义对象的时候，常常事先指定一个条件 P ，然后考虑满足条件 P 的对象中最特殊的一个，记为 X_0 . 它满足对任何满足条件 P 的对象 X ，都能找到唯一的态射 $X \rightarrow X_0$ 或者 $X_0 \rightarrow X$.

条件 P 一般可以表述为范畴 $\mathcal{C}$ 中的一张交换图表. 即我们事先给定一些对象 X 和对象之间的态射，使得它们和 $\mathcal{C}$ 中的某个对象交互后给出的图表交换. 前者所含有的所有资料可以归并为一个函子 $\alpha: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ，对每个对象 $X \in \mathcal{C}$ 我们也可以考虑函子 $\underline{X}$ ，意谓将 $\mathcal{D}$ 中的每个对象都打到 X ，每个态射都打到 id_X . 这样从 F 到 $\underline{X}$ 的自然变换实际上就给出了我们想要的自然性：即给出 $\{f_i\}$ 使得对任意 $i, j \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ 和 $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(i, j)$ 均有

$$\begin{array}{ccc} \alpha(i) & \xrightarrow{\alpha(\phi)} & \alpha(j) \\ & \searrow f_i \quad \swarrow f_j & \\ & X & \end{array}$$

交换.

Definition 1.1.5 ($\mathcal{D}$ -型图表). 对任意范畴 $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ ，以 $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 的函子作为对象，函子之间的自然变换作为态射所得的范畴称为 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathcal{D}$ -型图表，记为 $\mathcal{D}[\mathcal{C}]$. 直观上来看，我们事先选择一个“图形”作为 $\mathcal{D}$ （比如离散范畴，三角形等；所以 $\mathcal{D}$ 一般是一个具体的小范畴，我们的关注点完全是放在 $\mathcal{C}$ 上的），然后把 $\mathcal{C}$ 中所有形如这个图形的交换图表作为对象，所有这些交换图表之间的“自然变换”作为态射构建出了一个范畴.

给定 $\alpha \in \mathcal{D}[\mathcal{C}]$ ，我们上面的说法可归结于考虑一个范畴：

$$\begin{cases} \text{Obj} : (X, (f : \alpha \Rightarrow \underline{X})); (X \in \text{Ob}(\mathcal{C}), f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}[\mathcal{C}]}(\alpha, \underline{X})) \\ \text{Mor} : [\eta : (X, f) \rightarrow (Y, g)] = (X \xrightarrow{\eta} Y) \text{ s.t. } \alpha \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \underline{X} \\ \xrightarrow{\quad} \underline{Y} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{\eta}} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \end{cases}$$

其中 $\tilde{\eta}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射 $X \xrightarrow{\eta} Y$ 所诱导出的自然变换 $\underline{X} \xrightarrow{\tilde{\eta}} \underline{Y}$. 我们把这个范畴记为 (α/Δ) . 现在我们可以来定义余极限了.

Definition 1.1.6 (Colimit). 给定小范畴 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}$ -型图表 $\alpha \in \mathcal{D}[\mathcal{C}]$. 那么 α 的余极限指范畴 (α/Δ) 中的始对象，即一组资料 (X, f) 使得对任意 (Y, g) 均存在唯一的 $\eta : X \rightarrow Y$ 使得 $g = \tilde{\eta} \circ f$. 记作 $\varinjlim \alpha$. 注意态射 f 也是所选资料的一部分.

我们也可以给出最经典的交换图表表述方式：对任意 $i, j \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ 和 $\phi : i \rightarrow j$,

下述完全在 $\mathcal{C}$ 中定义的图表均交换.

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha(i) & \xrightarrow{\alpha(\phi)} & \alpha(j) \\
 f_i \searrow & & \swarrow f_j \\
 & \varinjlim F & \\
 g_i \swarrow & & \searrow g_j \\
 & \eta \downarrow \exists! & \\
 & A &
 \end{array}$$

将所有箭头反向就可以得到 limit 的定义. 余极限的例子很多, 一方面我们可以取一些特殊的小范畴 $\mathcal{D}$. 比如如果取 $\mathcal{D}$ 是离散范畴 (态射只有恒等态射), 那么其建构出的余极限被称为**余积** (Coproduct), 我们此时可以省去函子 F 的说辞, 直接说一些 $\mathcal{C}$ 中的对象 $\{X_\alpha\}$ 给出余积 $\coprod X_\alpha$.

此外, 还有两种有用的小范畴

$$\bullet \rightrightarrows \bullet \qquad \bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

由它们建构出的余极限被称为**余等化子** (Coequalizer) 和**推出** (Pushout, 或者说余纤维积). 前者相当于确定了两个对象 $X, Y \in \mathcal{C}$ 和两个态射 $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. 它的余极限建构出的对象可被记为 $\text{coker}(f, g)$. 那么它满足如下泛性质:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow[f]{g} & Y \\
 & \searrow \alpha & \downarrow \exists! \eta \\
 & & \text{coker}(f, g) \\
 & & \downarrow \\
 & & Z
 \end{array}$$

即如果对象 Z 满足 $\alpha \circ f = \alpha \circ g$, 那么存在唯一的 η 使得图表交换.

后者在拓扑中极为常见. 给定三个对象 X, Y, Z 和两个态射 $f: X \rightarrow Y, g: X \rightarrow Z$, 上面图表给出的余极限记为 $Y_f \sqcup_g Z$. 它应当满足如下泛性质.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & & \\
 g \downarrow & & \downarrow \tau_1 & \searrow \eta_1 & \\
 Z & \xrightarrow{\tau_2} & Y_f \sqcup_g Z & & \\
 & \searrow \eta_2 & & \swarrow \exists! & \\
 & & & & W
 \end{array}$$

将箭头反向, 类似地可以得到积 (product), 等化子 (equalizer), 拉回 (pullback) 的定义. 这两个对偶的建构在之后的讨论中有相似之处, 也有很大的不同. 除了研究各种余极限之外, 还有一件重要的事情是: 余极限是否存在? 由于余极限实际上是某个范畴中的“始对象” (大概可以想象: 对象是 $(X, F \xrightarrow{\eta} \underline{X})$, 态射是关于 $F \xrightarrow{\eta_1} \underline{X}$ 与 $F \xrightarrow{\eta_2} \underline{Y}$ 交换的 $\underline{X} \xrightarrow{\bar{\eta}} \underline{Y}$, 这等价于在 $\mathcal{C}$ 中寻找一个自然的态射 $X \rightarrow Y$. 余极限就是这个范畴中的始对象.) 所以如果它存在一定在同构意义下唯一. 但是它在一些范畴中未必存在! 但我们常见的一些范畴, 如 $\text{Set}, \text{Top}, \text{Grp}, \text{Ab}$ 都是有余极限的. 拥有余极限的范畴被称为**余完备的**, 拥有极限的范畴被称为**完备的**. 是否完备是衡量一个范畴是否好的标准, 因为像之前提到的许多构造都是在余极限存在的基础上才能够进行讨论. 比如下述的判定方法:

Proposition 1.1.7. 一个范畴是余完备的当且仅当存在余积和余等化子。

接下来我们讨论在上面变化下余极限会得到保持. 比如对两个范畴. 一般的函子和极限是否交换 ($\varinjlim(F\alpha) \xrightarrow{\sim} F\varinjlim(\alpha)$) 是比较复杂的问题, 但是下面的关于收缩的问题是我们可以讨论清楚的: 回忆我们在任何范畴里都能定义“收缩”.

Proposition 1.1.8. 给定小范畴 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathcal{D}$ -型图表 f . 考虑如下范畴:

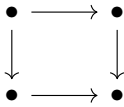
$$\begin{cases} \text{Obj: } (\alpha \in \text{Ob}(\mathcal{D}[\mathcal{C}]), X \in \text{Ob}(\mathcal{C}), f : \alpha \Rightarrow X); \\ \text{Mor: } [\theta : (\alpha, X, f) \rightarrow (\beta, Y, g)] = (X \xrightarrow{\theta} Y, \alpha \xRightarrow{\theta} \beta, f \xRightarrow{\theta} g). \end{cases}$$

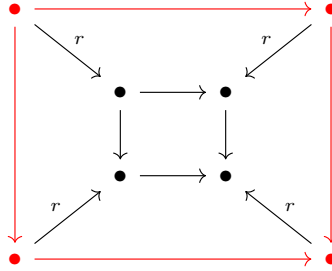
如果 r 是该范畴下的一个收缩, 那么 $r\varinjlim F \xrightarrow{\sim} \varinjlim(rF)$.

我们可以自然地为一个范畴定义它的锥: 比如说 $\mathcal{D}$ 的锥对象是

$$C\mathcal{D} : \begin{cases} \text{Obj: } \text{Ob}(\mathcal{D}) \cup \{*\}; \\ \text{Mor: } \text{Mor}(\mathcal{D}) \cup [i \rightarrow *]_{i \in \mathcal{D}}. \end{cases}$$

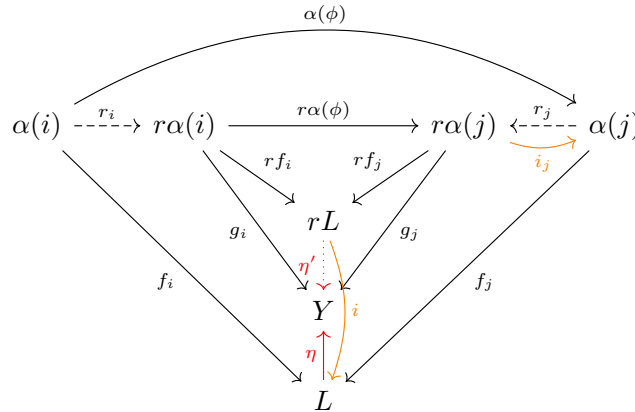
那么上面建立的范畴就是 $\mathcal{C}$ 上的 $C\mathcal{D}$ -型图表. 比如说, 如果考虑 $\mathcal{D} = \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$,

那么 $C\mathcal{D}$ 就是形如  的正方形交换图表, 态射是正方形图表间的“自然”变换.



图中的 r 需保证所有图表交换. 那么上面的命题就告诉我们如果这样的收缩存在, 那么小的正方形图表也是一个推出, 余极限的情况是类似的.

Proof. 记 $\varinjlim f = L$. 我们只需要验证资料 (rL, rf) 满足 $r\alpha$ 的余极限所对应的泛性质. 即对任意 $(Y, r\alpha \xRightarrow{g} Y)$ 存在 $\eta' : rL \rightarrow Y$ 使得 $\tilde{\eta} \circ rf = g$. 根据 $r \circ i = \text{id}$ 可建构下述交换图表.



如图, 对任意 $i \xrightarrow{\phi} j$, 我们构建出内圈的一个交换图表. 根据 r 的自然性, 我们有 $(g_j r_j) \circ \alpha(\phi) = g_i r_i$, 从而可用对 $\alpha(i) \xrightarrow{g_i r_i} Y$ 使用 α 的余极限的泛性质, 得到唯一的 $L \xrightarrow{\eta} Y$ 使得外圈两个四边形交换. 现在根据 i 的自然性 (这里的 i 是从内圈图表到外圈图表的单射) 得到右侧关于橙色态射的图表交换. 取 $\eta' = \eta \circ i$, 只需验证内圈的两个三角形交换. 首先含橙色边的四边形交换给出 $i \circ r f_j = f_j \circ i_j$, 然后包含 g_j 的四边形交换给出 $g_j \circ r_j = \eta \circ f_j$. 由于 $r_j \circ i_j = \text{id}$, 后者左右均在右侧复合一个 i_j 得到

$$g_j = \eta \circ f_j \circ i_j = \eta \circ i \circ r f_j = \eta' \circ r f_j.$$

所以 η' 确实使得内圈图表完全交换.

再来验证唯一性: 我们声称当 η' 确定时, $\eta' \circ r$ 能给出使得外圈图表交换的一个 η . 首先利用 r 在右侧的自然性得到 $r f_j \circ r_j = r \circ f_j$, 从而

$$\eta \circ f_j = \eta' \circ r \circ f_j = \eta' \circ r f_j \circ r_j = g_j \circ r_j.$$

满足要求, 所以根据 L 的泛性质可得 $\eta' \circ r$ 是唯一确定的, 在右侧复合 i 就证明了 η' 的唯一性.

综上所述, (rL, rf) 的确满足 $r\alpha$ 的余极限泛性质, 因此 $rL \simeq \varinjlim (r\alpha)$, 证毕. 

这个命题会在后续考虑两个 Van Kampen 定理之间关系时起到巨大作用.

Groupoids and Fundamental Groupoids

我们称一个范畴 $\mathcal{C}$ 是**群胚**如果 $\mathcal{C}$ 中的每个态射都是同构. 对一般的范畴, 我们只能说 $\text{Hom}(X, X)$ 是一个幺半群, 但在群胚中每个 $\text{Hom}(X, X)$ 都是群, 反过来一个群可以被建构为仅含一个对象的群胚, 从而是一种特殊的群胚.

群胚中的对象非常容易是同构的, 只要 $\text{Hom}(X, Y)$ 非空, 就存在一个态射给出 X 和 Y 之间的同构, 在态射集上 $\text{Hom}(X, X), \text{Hom}(X, Y), \text{Hom}(Y, X), \text{Hom}(Y, Y)$ 都是同构的. 这自然将我们引向连通性的概念:

Definition 1.1.9 (连通性). 我们可为任意范畴 $\mathcal{C}$ 构建一个无向图 G , 顶点为全体对象, 当且仅当 $\text{Hom}(X, Y)$ 或者 $\text{Hom}(Y, X)$ 非空时在 X, Y 之间连一条边. (这很形象: 只要 X, Y 之间有态射就把箭头抹去变为无向边) 称两对象 X, Y 是**连通的**当且仅当它们在图 G 中连通; 称范畴 $\mathcal{C}$ 是**连通的**当且仅当 G 是连通图.

很明显在群胚中 X, Y 连通等价于 $\text{Hom}(X, Y)$ 非空, 从而等价于 X, Y 同构.

回忆之前范畴的骨架的概念, 考虑一个群胚的骨架, 它在每个连通分支中取出一个对象, 并且这些对象之间两两之间无态射. 从而, 任意群胚的骨架都是离散群胚, 故任意群胚可形变收缩为一个离散群胚, 而离散群胚又可以单纯看成“一些群”, 所以群胚的结构并不复杂. 正如虽然有限维线性空间都同构于某个 $\mathbb{R}^n$, 即有限

维线性空间范畴等价于 $\mathbb{R}^n$ 及其之间的线性映射构成的范畴，但研究抽象线性空间仍有意义一样，研究群胚仍有意义，因为它能够非常自然地出现，选择其骨架就破坏了关于每个点的对称性，就难以把握整体的结构。

接下来我们将把上面的理念和拓扑空间结合起来。我们想要研究拓扑空间中的道路，即全体

$$\phi: I \rightarrow X$$

构成的空间。一方面，它可以被赋予紧开拓扑而成为一个拓扑空间。我们这里关心它的另一种性质：如果两条道路 ϕ, ϕ' 满足 $\phi(1) = \phi'(0)$ ，那么这两条道路可被“首尾连接起来”，成为一条新的道路，根据复合函数的写法可被记为 $\phi' \circ \phi$ 。有了这样的想法后，我们可以建立一个范畴，其对象是拓扑空间中所有点， $x \rightarrow y$ 的态射是所有以 x 为起点， y 为终点的道路，这样态射的复合可用被良好定义。

但这构成了一个范畴吗？范畴里还需要有恒等态射，但是根据我们的复合规则， $\phi = \text{const } x_0$ （常值道路， $\phi(t) \equiv x_0, t \in I$ ）不是恒等态射，因为它复合上任意道路都会产生一段长为 $1/2$ 的常值道路，这和原本的道路就不是相同的。

其中一种解决方法是考虑把长为 0 的道路加入进来，或者干脆把任意非负长度的道路（ $\phi: [0, l] \rightarrow X$ ）都加入进来，对长为 l_1 和 l_2 的两条道路，它们复合后产生的道路长为 $l_1 + l_2$ 。这样建构得到的范畴称为**道路范畴**，记作 PX 。但是，虽然这样可以得到恒等态射，可是每条长度非零的道路 $\phi \in \text{Hom}(x, y)$ 都不是可逆的，从而导致任意两个对象都不是同构的，因为它复合上任何道路长度不会减少，此外态射集可以预见地会非常大，因为两点间的道路很多，甚至对很简单的空间（比如 $\mathbb{R}$ ）都是如此。

于是我们希望把“同类型”的道路放在一起，即考虑道路的同伦等价类，这给出了下面非常重要的，基本群胚的定义。道路范畴作为一个范畴来说非常糟糕，它拥有比如几乎不存在可逆的态射这样的问题，不过在同伦的意义下，它能够发挥很大的作用，比基本群提供更多的信息。

Definition 1.1.10 (基本群胚). 给定任意拓扑空间 X 。我们构建一个范畴，其对象为拓扑空间中的所有点，所有 $x \rightarrow y$ 的态射为起点为 x ，终点为 y 的道路同伦类。道路的复合就是道路的首尾拼接， $\text{Hom}(x, x)$ 中的恒等态射是 $\text{const } x$ 。这个范畴被称为 X 的**基本群胚**，记作 ΠX 。

Remark. 基本群胚可以看作是道路范畴商掉同伦关系得到的结果，这引出了更为广泛的一类构造：对任何一个具有同伦等价关系的范畴 $\mathcal{C}$ ，定义其**同伦范畴** $h\mathcal{C}$ 满足

$$h\mathcal{C} = \begin{cases} \text{Obj: } \mathcal{C} \text{ 中的对象;} \\ \text{Mor: } \mathcal{C} \text{ 中态射的同伦等价类.} \end{cases}$$

两个显然的例子是 Cat 和 Top 。一些拓扑教材的特点是把后者广泛化，比如带基点拓扑空间 $\text{Top}_\bullet$ ，拓扑空间对 $\text{Top}(2)$ ， A 下的拓扑空间范畴 Top^A （对象为 $(X, A \xrightarrow{f} X)$ ）， B 上的拓扑空间范畴 Top_B （对象为 $(Y, Y \xrightarrow{g} B)$ ）上都能定义类似的概念。

另一方面,“同伦等价的对象”其实就是 $\mathbf{hC}$ 上同构的对象,所以我们经常先证明一个性质在同伦下被保持,从而推出对同伦等价的对象性质相同.

再往后说的话,同伦可以被看作一个 2-范畴的建构.即同伦是在态射集上定义的态射.我们通常所说的同伦得到的性质被归结于下面的横合成与纵合成:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & F & \\
 \curvearrowright & & \curvearrowright \\
 \mathcal{C}' & \xrightarrow{G} & \mathcal{C} \\
 \downarrow \theta & & \downarrow \psi \\
 & H & \\
 \curvearrowleft & & \curvearrowleft
 \end{array}
 & \text{合成为} &
 \begin{array}{ccc}
 & F & \\
 \curvearrowright & & \curvearrowright \\
 \mathcal{C}' & \xrightarrow{\psi \circ \theta} & \mathcal{C} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 & H & \\
 \curvearrowleft & & \curvearrowleft
 \end{array}
 \end{array}$$

当然不是我们说它是一个群胚它就是一个群胚了.我们需要验证它满足范畴的各条性质,并且任何态射都是可逆的.这和“基本群是一个良定义的群”的验证是完全类似的.接下来我们用 γ 来表示道路, $[\gamma]$ 代表道路所在同伦类.有时我们也直接取某个元素 $\phi \in \text{Hom}_{\Pi X}(x, y)$, 这时候就不会添加 $[\cdot]$.

首先如果有从 x 到 y 的道路 γ_1, γ'_1 和从 y 到 z 的道路 γ_2, γ'_2 满足 $\gamma_1 \simeq \gamma'_1$ 和 $\gamma_2 \simeq \gamma'_2$, 那么 $\gamma_2 \circ \gamma_1 = \gamma'_2 \circ \gamma'_1$, 从而复合是良定义的.其次常值道路确实是恒等态射,因为它复合上任何道路都同伦于该道路本身.最后我们对每条从 x 到 y 的道路 γ 都能定义 γ^{-1} 满足

$$\gamma^{-1} : I \rightarrow X, \quad \gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t).$$

从而 $\gamma^{-1} \in \text{Hom}_{\Pi X}(y, x)$ 并且 $\gamma^{-1} \circ \gamma \simeq \text{id}_x, \gamma \circ \gamma^{-1} \simeq \text{id}_y$. 因此 $[\gamma]$ 可逆,这就完整证明了 ΠX 是一个群胚,特别地, $\pi_1(X, x_0) = \text{Hom}_{\Pi X}(x_0, x_0)$ 是一个群.

我们可以不妨假设 X 是道路连通的,否则可以考虑 X 的每个的道路连通分支,得到的只是某个结果的数次重复.这样的话,任意两点间均存在道路,从而 ΠX 中的任意两对象都是同构的.换句话说, ΠX 是连通的,从而对任意其中某个对象 x_0 , $\pi_1(X, x_0)$ 都是 ΠX 的一个骨架,并且存在群胚之间的形变收缩

$$\Pi X \xrightarrow{r} \pi_1(X, x_0).$$

再次强调 r 的选取不是典范的,这对应于基本群的基点转换不是典范的.

Corollary 1.1.11. 如果 X 是道路连通的,那么包含函子 $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi X$ 给出群胚之间的范畴等价.

回忆形变收缩 r 的建立过程,对某个给定的 x_0 ,只需要知道基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 和从 x_0 出发到每个点的一个道路同伦类 $\phi_y : x_0 \rightarrow y$, 就能够完整复原出整个基本群胚.从这个角度来说,基本群胚也并没有告诉我们更多的信息:我们常说的变化基点给出的群同构 $\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X, y)$ 实际上就是基本群胚中 $\text{Hom}_{\Pi X}(x, x)$ 和 $\text{Hom}_{\Pi X}(y, y)$ 之间的一种广泛的同构关系.但是基本群胚的确更“自然”,比如它并不需要在带基点拓扑空间范畴 $\mathbf{Top}_\bullet$ 中讨论问题,以及我们在计算基本群时,也经常只在群同构的意义下确定某个 $\pi_1(X)$ 作为只和拓扑空间 X 本身相关的性质.

回忆基本群可作为一个函子 $\pi_1 : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grp}$ 出现, 即拓扑空间之间的连续映射会诱导出群上的同态. 完全类似地这可以推广到群胚上:

Proposition 1.1.12. $\Pi : X \mapsto \Pi X$ 可被建构为一个 $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grpoid}$ 的函子.

Proof. 对任意连续映射 $X \xrightarrow{f} Y$, Πf 应当被定义为一个 $\Pi X \rightarrow \Pi Y$ 的群胚间的函子. 它的定义是明显的:

$$\Pi f : \begin{cases} \text{Obj: } x \mapsto fx; \\ \text{Mor: } [x \xrightarrow{[\phi]} y] \mapsto [fx \xrightarrow{[f \circ \phi]} fy]. \end{cases} \quad (\text{注意到 } I \xrightarrow{\phi} X \xrightarrow{f} Y.)$$

并且有明显的复合关系 $\Pi g \circ \Pi f = \Pi(gf)$ 成立, 所以 Πf 的确是一个函子. $\square$

基本群还具有同伦不变性. 显然同伦的态射不一定诱导出基本群胚之间的同构, 它在对象上就会出问题. 但是群胚是特殊的范畴, 而我们已经定义过范畴之间的同伦, 因此下面的结果并不奇怪.

Proposition 1.1.13. 如果 $f, g : X \rightarrow Y$ 满足 $f \simeq g$, 那么 $\Pi f, \Pi g : \Pi X \rightarrow \Pi Y$ 满足 $\Pi f \simeq \Pi g$.

我们完全从范畴论的视角来看这件事, 首先同伦对应的交换图表在两个范畴中是类似的, 我们可以把 Π 作用于拓扑空间中同伦对应的交换图表.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\iota_0} & X \times I & \xleftarrow{\iota_1} & X \\ & \searrow f & \downarrow h & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array} \xRightarrow{\Pi} \begin{array}{ccccc} \Pi X & \xleftarrow{\Pi \iota_0} & \Pi(X \times I) & \xleftarrow{\Pi \iota_1} & \Pi X \\ & \searrow \Pi f & \downarrow \Pi h & \swarrow \Pi g & \\ & & \Pi Y & & \end{array}$$

Lemma 1.1.14. Π 是保积对象的函子, 即 $(\Pi(X \times Y), \Pi p_X, \Pi p_Y)$ 是范畴 $\mathbf{Grpoid}$ 中 ΠX 和 ΠY 的积对象.

Proof. 假设存在 $G \in \mathbf{Grpoid}$ 以及 $G \xrightarrow{\alpha} \Pi X, G \xrightarrow{\beta} \Pi Y$, 我们证明可以找到唯一的从 G 到 $\Pi(X \times Y)$ 的函子使得图表

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & \swarrow \alpha & \downarrow & \searrow \beta & \\ \Pi X & \xleftarrow{\Pi p_X} & \Pi(X \times Y) & \xrightarrow{\Pi p_Y} & \Pi Y \end{array}$$

交换. 首先在对象层面上, $\Pi(X \times Y), \Pi(X), \Pi(Y)$ 的对象集都是这些拓扑空间对应的“底集合”, 而在集合层面上 $X \times Y$ 就是 X 和 Y 的积对象, 因此存在唯一的 $\text{Ob}(G) \rightarrow \text{Ob}(\Pi X \times Y)$ 使得图表交换.

接下来考虑态射, 如果 $g \in \text{Mor}(G)$ 满足 $\alpha(g) = [\phi], \beta(g) = [\psi]$, 那么存在一个交换图表

$$\begin{array}{ccccc} & & I & & \\ & \swarrow \phi & \downarrow & \searrow \psi & \\ X & \xleftarrow{p_X} & X \times Y & \xrightarrow{p_Y} & Y \end{array}$$

从而存在唯一的 $\sigma : I \rightarrow X \times Y$ 使得图表交换，这给出 $X \times Y$ 上的一条道路. 另一方面，如果寻找不同的代表元 $h_1 : \phi \simeq \phi'$ 和 $h_2 : \psi \simeq \psi'$ ，那么两个同伦就给出积对象中的同伦：

$$\begin{array}{ccccc} & & I \times I & & \\ & \swarrow h_1 & \downarrow & \searrow h_2 & \\ X & \xleftarrow{p_X} & X \times Y & \xrightarrow{p_Y} & Y \end{array}$$

于是我们可以良好确定 g 被映到的道路同伦类 $[\sigma]$ ，所有这些资料拼凑起来给出唯一的函子 $G \rightarrow \Pi(X \times Y)$. 根据 $\sigma \circ p_X = \phi$ 可知 $\Pi p_X([\sigma]) = \alpha(g)$ ，所以原图表交换，证毕. $\square$

Proof for 1.1.13. 首先由于

$$\Pi(X \times I) \xrightarrow{\sim} \Pi X \times \Pi I$$

是范畴同构，我们可以把上面图中右侧的 $\Pi(X \times I)$ 替换成 $\Pi X \times \Pi I$. 我们来看函子 $\Pi X \rightarrow \Pi(X \times I) \rightarrow \Pi X \times \Pi I$ 的作用结果：

$$\begin{cases} \text{Obj: } x \xrightarrow{\Pi \iota_0} (x, 0) \mapsto (x, 0); \\ \text{Mor: } [x \xrightarrow{f} y] \xrightarrow{\Pi \iota_0} [(x, 0) \xrightarrow{\iota_0 \circ f} (y, 0)] \mapsto [(x, 0) \xrightarrow{(f, \text{const } 0)} (y, 0)]. \end{cases}$$

这和先把 ΠX 通过 $x \mapsto (x, 0)$ 嵌入到 $\Pi(X) \times \mathcal{J}$ ，再将后者嵌入到 $\Pi(X) \times \Pi I$ 中没有区别：对象和态射都只会限制在第二个分量为零处. 因此，下述图表交换：

$$\begin{array}{ccccc} & & \Pi X \times \mathcal{J} & & \\ & \swarrow j_0 & \downarrow \iota & \nwarrow j_1 & \\ \Pi X & \xrightarrow{i_0} & \Pi X \times \Pi I & \xleftarrow{i_1} & \Pi X \\ & \searrow \Pi f & \downarrow & \swarrow \Pi g & \\ & & \Pi Y & & \end{array}$$

这已经给出范畴间同伦的交换图表，从而 $\Pi f \simeq \Pi g$ ，证毕. $\square$

Corollary 1.1.15 (同伦不变性). 如果 $X \simeq Y$ 是同伦等价的拓扑空间，那么 $\Pi X \simeq \Pi Y$ 是同伦等价的群胚.

最后，实际上我们对任何两个空间 $\Pi(X, Y)$ 都能定义它们之间的群胚：首先建构

$$P(X, Y) = \begin{cases} \text{Obj: 从 } X \text{ 到 } Y \text{ 的连续映射;} \\ \text{Mor: } \text{Hom}(f, g) \text{ 是从 } f \text{ 到 } g \text{ 的同伦.} \end{cases}$$

到目前定义的范畴对应于道路范畴. 很明显下一步的定义同伦之间的同伦，即对 $h, k : f \Rightarrow g$ ，如果它们之间存在 $\text{rel } \partial I$ 的定端同伦，就称它们是等价的. 我们就把商掉等价关系之后的范畴定义为 $\Pi(X, Y)$ ，那么 $\Pi(X)$ 实际上就是 $\Pi(\{\text{pt}\}, X)$. (从另一个角度来说， $\Pi(X, Y)$ 其实是 $\Pi(\text{Hom}(X, Y))$.)

Van Kampen Theorem but Groupoids

一般拓扑课程中的 Van Kampen 定理主要描述的是：如果存在两个集合 X_1, X_2 满足 $X_1 \cup X_2 = X$ ，并且 $X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ 都是包含某个给定 x_0 的道路连通开集，那么 $\pi_1(X, x_0)$ 可以被 $\pi_1(X_1, x_0), \pi_1(X_2, x_0), \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$ 所表示，具体来说是包含映射诱导出的群中的融合积 $\pi_1(X_1, x_0) *_{\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)} \pi_1(X_2, x_0)$ 。

依范畴的观点来看，融合积其实就是 $\mathbf{Grp}$ 中的 pushout：它具体是什么不重要，关键是它可被 compute 并且满足 pushout 的泛性质。

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) & \xhookrightarrow{i_1} & \pi_1(X_1, x_0) \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ \pi_1(X_2, x_0) & \xrightarrow{j_2} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

而当 X_1, X_2 都是开集时，实际上也有拓扑空间中类似的事情成立：

$$\begin{array}{ccc} X_1 \cap X_2 & \xhookrightarrow{i_1} & X_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ X_2 & \xrightarrow{j_2} & X \end{array}$$

是一个推出。（简要陈述证明：我们验证泛性质。如果存在映射 $f_1 : X_1 \rightarrow Y$ 和 $f_2 : X_2 \rightarrow Y$ 在 $X_1 \cap X_2$ 上等同，那么它们在集合层面上拼出映射 $f : X \rightarrow Y$ 。再验证这是连续映射，因为对开集 $U \subset Y$ ， $f^{-1}(U) = f_1^{-1}(U) \cup f_2^{-1}(U)$ 为开集。）

所以我们可以很简单的把 Van Kampen 定理陈述为： $\pi_1(\cdot, x_0)$ 在某种相容性假设下是保 pushout 的函子。这一件事的可推广性就很强了：比如说，pushout 能不能换成其他形式的余极限，比如相容性假设在何种条件下的必要性，比如能不能把基本群函子化为更一般的基本群胚函子（注意到后者不依赖于基点选取）。

回忆 Van Kampen 定理的证明过程，大致可以分为下面几部分：

- 考虑任意群 G ，固定群同态 $f_1 : \pi_1(X_1, x_0) \rightarrow G$ 和 $f_2 : \pi_1(X_2, x_0) \rightarrow G$ ，它们在 $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$ 上等同。我们尝试确定唯一的 $f : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ 使得 $f \circ j_* = f_*$ 。
- 对每一条以 x_0 为基点的环路，通过把它投影到它所在的道路同伦类中，可以将每条完全落在 X_* 中的环路（ $P(X_*, x_0)$ 中元素）打到某个 G 中元素。这样，我们先证明存在唯一的从“全体环路” $P(X, x_0)$ 到 G 的同态，再证明整个同态对同伦类是等同的，就完成了证明。
- 一条 X 中的环路可能有一些段落在 X_1 中，有一些段落在 X_2 中。我们可以把道路分成有限段，每段都落在 X_1 或者 X_2 中，并且每段的端点都落在 $X_1 \cap X_2$ 中。从而根据 $X_1 \cap X_2$ 的道路连通性，可以取一条从每个端点到 x_0 的道路，这样把每个段都补成了一个完全落在某个 X_* 中的圈。每个圈打到的像已经是确定的 G 中元素，所以整个圈打到的像就是这些 G 中元素的相乘。

- 最后逐步验证这些相容性条件：每个圈的像和划分无关，和端点到 x_0 的道路无关，并且在同伦下保持一致。

我们看到中间为了把一个圈分解成多个落在小空间中的圈的并，需要基点落在每个小空间中，并且小空间都是道路连通的。但是，如果我们放弃对“圈”的执着，转而考虑空间中所有从 x 到 y 的道路，会发现同样的 argument 给出可以把这条道路细分后使每一小段落在某个小的 X_* 中，从而直接决定出唯一的态射。我们可以看到证明的 generalizability 得到的提升（不需要再“人为”选择道路，但还是需要验证和划分无关）。最关键的是这样的论证不需要依赖于道路连通性假设，也不需要关于基点的假设，从而使整个证明的变得很高。最后，把两个开集替换为任意多个开集，上面的论证依然成立，不过整体还是要落在子空间这个框架内（通过包含关系来诱导一些态射）。结论也由此从 pushout 变为更一般的 colimit。我们接下来就来展示下面普遍性颇高的群胚版本：

Theorem 1.1.16 (Van Kampen). 给定拓扑空间 X 和它的一族向下封闭的开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ，满足如果 $U_i, U_j \in \mathcal{U}$ 那么 $U_i \cap U_j \in \mathcal{U}$ 。现在我们为这族开覆盖指定一个范畴 $\mathcal{U}$ ：

$$\begin{cases} \text{Obj: 指标集 } I. \\ \text{Mor: 引一条 } i \rightarrow j \text{ 的态射当且仅当 } U_i \subset U_j. \end{cases}$$

$\mathcal{U}$ 是一个小范畴，并且存在函子 $\mathcal{U} \rightarrow \text{Top}$ 把 i 打到 U_i ，把可能的 $i \rightarrow j$ 打到包含映射 $U_i \hookrightarrow U_j$ ，我们把它记为 $F \in \text{Top}[\mathcal{U}]$ 。

现在基本群胚函子和 F 的复合给出 $\Pi \circ F : \mathcal{U} \rightarrow \text{Grpoid}$ 。那么

$$\Pi(X) = \varinjlim (\Pi \circ F) = \varinjlim_{i \in I} \Pi(U_i).$$

此外，由于容易证明 $\varinjlim F = X$ ，上述命题也可以表述为

$$\Pi(\varinjlim F) = \varinjlim (\Pi F).$$

Proof. 证明完全和之前 pushout 的版本是相同的，只需验证 colimit 的泛性质，考虑一族 $\{\varphi_i : \Pi(U_i) \rightarrow G\}_{i \in I}$ 。因为 I 是紧的，所以每条道路都只涉及到有限个 $\mathcal{U}$ 中的开集，然后把它分割成一些小道路，每条小道路都落在一个开集中。这样整个道路被映到的像根据复合的性质被唯一确定，只需验证它是良定义的即可。

良定义性来源于一条道路在不同的分划下给出相同的像，以及同伦的道路 $h : \phi \simeq \psi$ 给出相同的像。前者的证明方法是：取出两个 I 的分划（称为蓝分划和红分划），蓝分划的第 i 个区间落在 U_i 中，红分划的第 i 个区间落在 U'_i 中。首先我们可以将两个分划细分，使得每个小区间 a 都一致地落在 U_i 和 U'_i 中。现在根据 $\mathcal{U}$ 的建构， $\varphi_i(a) = \varphi_{ij}(a) = \varphi_j(a)$ ，其中 φ_{ij} 是 $U_i \cap U_j \rightarrow G$ 的映射。

后者是把道路之间的同伦诱导而得的方块 $I \times I$ （左右两侧是 $\text{const } a$ 和 $\text{const } b$ ，上下两侧是 ϕ 和 ψ ）细分为一些更小的方块，每个方块都完全落在某个 U_i 内部。

考虑 $I \times I$ 中的一条沿小正方形网格从最左侧走到最右侧的一条折线，它被映到 X 中的一条道路。我们称一条折线**包裹**的小正方形个数是位于折线上方的的小正方形个数。 ϕ 包裹 0 个小正方形， ψ 包裹全部小正方形。我们现在把 ϕ 沿着网格逐渐“拖”到 ψ ：每次使折线包裹的小正方形个数增加 1，这样由于每个 U_i 内部同伦的道路给出相同的像，所以每次移动折线对应的道路被映到的像不变。从而有限步归化后我们可以证明 ϕ 和 ψ 拥有相同的像，证毕。 

但是基本群胚的 Van Kampen 定理仍然有不小的问题：它不适合计算，而且我们很难说一个函子的 colimit 具体是什么（相比 **Set** 和 **Grp** 而言）。根据我们已经建构的理论，可以用完全范畴论的观点推出基本群版本的 Van Kampen 定理，这会看出我们为什么需要道路连通性假设。

Theorem 1.1.17. 给定拓扑空间 X 和其开覆盖 $\mathcal{U}$ 对应的范畴 $\mathcal{U}$ 。如果基点 x_0 落在每个 U_i 中，并且每个 U_i 都是道路连通的，那么

$$\pi_1(X, x_0) = \varinjlim (\pi_1 \circ F) = \varinjlim_i \pi_1(U_i, x_0).$$

Proof. 想法是利用之前的定理 1.1.8，翻译成这里的语言就是：为每个 U_i 找到一个收缩 $r : \Pi(U_i) \rightarrow \pi_1(U_i, x_0)$ ，使得所有

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U_i) & \hookrightarrow & \Pi(U_j) \\ r \downarrow & & \downarrow r \\ \pi_1(U_i, x_0) & \hookrightarrow & \pi_1(U_j, x_0) \end{array}$$

交换。而收缩 r_i 实际上就是为每个 $x \in U_i$ 选择一条道路 $x \rightarrow x_0$ ，所以只要对 U_i, U_j 这条道路（在同伦意义下）是相同的，那么上述图表就交换。如果整体来看，我们就是要为每个 $x \in X$ 选择一条道路 $x \rightarrow x_0$ ，使得对每个包含 x 的 U_i ，这条道路都存在一个同伦类完全落在 U_i 中。如果 I 是有限集，那么这是容易的：因为在包含关系下可以选择极小的那些 U_i ，为其中的点选取一条完全落在 U_i 中的道路，再为稍大一些的 U_j 和那些还没选择道路的点选择一条落在 U_j 中的道路。每次选择都能够保证不和之前发生冲突（这用到 $U_i, U_j \in \mathcal{U} \Rightarrow U_i \cap U_j \in \mathcal{U}$ ）。特别地，为所有 U_i 选取完道路后就为所有 X 中点选取了道路（因为 $\mathcal{U}$ 是开覆盖），从而上述图表对 X 也兼容。根据定理 1.1.8 就直接得到结论。

如果 I 是无穷集，证明是技术化的：构建一个范畴 $\mathcal{C}$ ，其对象是 I 中所有有限子集，态射由包含关系诱导。有一个函子 $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$ ，它把每个 $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ 打到 $\varinjlim_{i \in A} \pi_1(U_i, x_0)$ ，把每个态射 $A \subset B$ 打到泛性质诱导出的包含映射

$$\iota : \varinjlim_{i \in A} \pi_1(U_i, x_0) \rightarrow \varinjlim_{i \in B} \pi_1(U_i, x_0)$$

（因为后者自带一些从 $\pi_1(U_i, x_0), i \in B$ 到 $\varinjlim_{i \in B} \pi_1(U_i, x_0)$ 的态射，其中也包含了 A 的部分）。我们已经证明了

$$\varinjlim_{i \in A} \pi_1(U_i, x_0) \cong \pi_1\left(\bigcup_{i \in A} U_i, x_0\right),$$

容易看到 ι 可以被拓扑空间中的包含映射 $\bigcup_{i \in A} U_i \rightarrow \bigcup_{i \in B} U_i$ 诱导. 我们接下来证明两件事:

- (1) $\varinjlim G = \pi_1(X, x_0)$, 即 $\varinjlim_{A \subset I, |A| < \infty} \pi_1(\bigcup_{i \in A} U_i, x_0) = \pi_1(X, x_0)$;
 (2) $\varinjlim G = \varinjlim \pi_1(U_i, x_0)$, 即 $\varinjlim_{A \subset I, |A| < \infty} \varinjlim_{i \in A} \pi_1(U_i, x_0) = \varinjlim_{i \in I} \pi_1(U_i, x_0)$.

(1) 直接验证泛性质得到: 为每个 A 选定 $\varphi_A : \pi_1(\bigcup_{i \in A} U_i, x_0) \rightarrow G$, 由于 $\pi_1(X, x_0)$ 中的每个圈都落在有限个开集的并中, 所以它的像已经被给定的信息完全确定下来. 良定性来源于范畴 $\mathcal{C}$ 是滤过的, 如果由两个集合 A, B 使得同时有 $x \in \pi_1(\bigcup_{i \in A} U_i, x_0)$ 和 $x \in \pi_1(\bigcup_{i \in B} U_i, x_0)$, 我们在 $A \cup B$ 中讨论问题就会发现它们映到相同的像.

(2) 我们来感受一下左边对象的性质. 首先我们有一个范畴 $\mathcal{U}$, 以 $\{\pi_1(U_i, x_0)\}_{i \in I}$ 作为对象, 由包含映射诱导出态射, 就构成了 $\mathbf{Grp}$ 中的一个 $\mathcal{U}$ -型图表. 现在对其中任意有限个对象构成的集合, 考虑它诱导出的子范畴的 colimit. 集合之间的包含关系诱导出 colimit 之间的态射, 所有这些 colimit 合起来构成了一个图表, 对这个图表再考虑 colimit 就得到左边的对象, 于是我们有明显的两层结构. 我们来证明这个两重 colimit 满足大的 colimit 的泛性质.

colimit 给我们的资料设为

$$\begin{aligned} & \{\varphi_{i,A} : \pi_1(U_i, x_0) \rightarrow \varinjlim_{j \in A} \pi_1(U_j, x_0)\}_{i \in A \subset I}, \\ & \{\varphi_A : \varinjlim_{j \in A} \pi_1(U_j, x_0) \rightarrow \varinjlim_{A \subset I, |A| < \infty} \varinjlim_{i \in A} \pi_1(U_i, x_0)\}_{A \subset I}. \end{aligned}$$

对每个 i , 复合 $\varphi_{\{i\}} \circ \varphi_{i,\{i\}}$ 就是一个 $\pi_1(U_i, x_0) \rightarrow \varinjlim_{A \subset I, |A| < \infty} \varinjlim_{i \in A} \pi_1(U_i, x_0)$ 的态射. 根据图表

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(U_i, x_0) & \xrightarrow{\varphi_{i,\{i\}}} & \varinjlim_{j \in \{i\}} \pi_1(U_j, x_0) & & \\ & \searrow \varphi_{i,A} & \downarrow & \searrow \varphi_{\{i\}} & \\ & & \varinjlim_{j \in A} \pi_1(U_j, x_0) & \xrightarrow{\varphi_A} & \varinjlim_{A \subset I, |A| < \infty} \varinjlim_{i \in A} \pi_1(U_i, x_0) \end{array}$$

的自然性可知 $\varphi_{\{i\}} \circ \varphi_{i,\{i\}} = \varphi_A \circ \varphi_{i,A}$ 对所有包含 i 的 A 成立, 因此可把这个态射记为 φ_i . 这样如果 $U_i \subset U_j$, 取 $A = \{i, j\}$ 就能得到 φ_i 和 φ_j 相容.

再证明泛性质成立. 任意选定相容的 $\{f_i : \pi_1(U_i, x_0) \rightarrow G\}_{i \in I}$, 根据第一个 colimit 的泛性质, 对每个 A 都有唯一的 $f_A : \varinjlim_{j \in A} \pi_1(U_j, x_0) \rightarrow G$, 并且它们关于集合的包含关系是相容的:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(U_i, x_0) & \xrightarrow{\varphi_{i,A}} & \varinjlim_{j \in A} \pi_1(U_j, x_0) & & \\ & \searrow \varphi_{i,B} & \downarrow \iota_{AB} & \searrow f_A & \\ & & \varinjlim_{j \in B} \pi_1(U_j, x_0) & \xrightarrow[f_B]{f_A} & G \end{array}$$

左侧的三角形本身就交换, 所以 $f_B \circ \iota_{AB}$ 也满足 $\varinjlim_A$ 的泛性质, 根据 f_A 的唯一性可知右侧图表交换. 所以再利用一次 colimit 的泛性质, 就得到

$$f : \varinjlim_{A \subset I, |A| < \infty} \varinjlim_{i \in A} \pi_1(U_i, x_0) \rightarrow G$$

使相容性成立. 反之, 如果有一个 f , 那么 $f \circ \varphi_A$ 就是 $\varinjlim_{j \in A} \pi_1(U_j, x_0) \rightarrow G$ 的相容态射, 根据 A 处 colimit 的唯一性可得 $f \circ \varphi_A = f_A$. 再根据 I 处 colimit 的唯一性可知 f 是唯一的.

至此就完成了整个证明.



Fundamental Group of The Circle

上面的关于基本群的 Van Kampen 定理 1.1.17 其实可以不使用任何关于群胚和泛性质的语言, 利用类似于最基本的 van kampen 定理证明的方法也可以完成. 并且我们仍然没有完成之前所说的“计算 S^1 的基本群”这个目标. 但是, 为什么我们必须选定一个基点 x_0 并让所有开集都道路连通呢? 如果 U_i 不是道路连通的, 我们还是能讨论群胚的骨架, 只是选出的代表元不止一个而已. 定理 1.1.8 对任何收缩均正确, 后面的证明是纯范畴论的, 所以可以想象选定更多的基点不会影响我们的结论. 实际上, 我们只需要对上面的证明做微小的改动, 就能得到下面的结论.

Definition 1.1.18. 对拓扑空间 X 和集合 $A \subset X$, 定义 $\Pi(X, A)$ 为 $\Pi(X)$ 中对象集为 A 的完全子范畴.

Theorem 1.1.19. 给定拓扑空间 X 和其开覆盖 $\mathcal{U}$ 对应的范畴 $\mathcal{U}$. 如果存在一个集合 A 落在每个 U_i 中, 并且 $A \hookrightarrow U_i$ 诱导出的 $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(U_i)$ 都是满射, 那么

$$\Pi(X, A) = \varinjlim_{i \in I} \Pi(U_i, A).$$

Proof. 根据条件, 每个 $\Pi(U_i, A)$ 都是 $\Pi(U_i)$ 的完全代表子范畴, 从而对有限集 I , 可以归纳地选取从每个 $x \in X$ 到 A 中某个点的道路, 得到一个对所有 U_i 都相容的收缩 $\Pi(U_i) \rightarrow \Pi(U_i, A)$, 然后利用 1.1.8 得到结论. 对无穷集 I , 证明和刚刚没有任何区别.



特别地, 对 $X = S^1 \subset \mathbb{C}$, 考虑 $U_1 = S^1 \setminus \{1\}$ 与 $U_2 = S^1 \setminus \{-1\}$, 选择 $A = \{\pm i\}$, 那么就可以使用多基点的 Van Kampen 定理 1.1.19: 由于 U_1, U_2 可缩, $U_1 \cap U_2$ 的两个连通分支均可缩, 因此 $\Pi(U_1 \cap U_2, A)$ 是两个元素的离散群胚 $\{0, 1\}$, $\Pi(U_1, A)$ 和 $\Pi(U_2, A)$ 都满足对每组 $x, y \in \{\pm i\}$, $\text{Hom}(x, y)$ 中恰有一个元素, 从而同构于 $\mathcal{J}$. 最后, 此时 colimit 就是 pushout. 到这里 $\Pi(S^1, A)$ 就已经基本清楚了:

$$\begin{array}{ccc} \{0, 1\} & \longrightarrow & \mathcal{J} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{J} & \longrightarrow & \Pi(S^1, A) \end{array}$$

已经可以直接验证 $\text{Hom}_{\Pi(S^1, A)}(\mathbf{i}, \mathbf{i}) \cong \mathbb{Z}$, 不过还可以再次简化: 我们发现根据连通性, $\{\mathbf{i}\}$ 同时是 $\Pi(U_1, A)$ 和 $\Pi(S^1, A)$ 的代表元 (根据道路连通性), 记 $x_0 = \mathbf{i}$, 所

以图表的右侧可再进行一次 pushout, 形如

$$\begin{array}{ccc} \Pi(X_1, A) & \xrightarrow{r} & \pi_1(X_1, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(X, A) & \xrightarrow{r} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

把二者复合起来, 最终得到的 pushout 图表就是

$$\begin{array}{ccc} \{0, 1\} & \xrightarrow{f} & * \\ \downarrow g & & \downarrow \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{h} & \pi_1(S^1, *) \end{array}$$

在对象的层面上这个 pushout 的走向是平凡的, 因此只需要考虑 $\iota \in \text{Hom}_{\mathcal{J}}(0, 1)$ 的去向, 它被映到 $h(\iota) \in \pi_1(S^1, *)$.

考虑 $h' : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{Z}$ 把 ι 映到 1 ($\mathbb{Z}$ 作为只要一个对象的群胚, 对象的去向是平凡的, 此处省略, 能理解是什么意思), 那么根据泛性质存在 $a : \pi_1(S^1, *) \rightarrow \mathbb{Z}$ 使得

$$\begin{array}{ccc} \{0, 1\} & \xrightarrow{f} & * \\ \downarrow g & & \downarrow \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{h} & \pi_1(S^1, *) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow a \\ \searrow h' \end{array}$$

另一方面, 考虑 $\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, *)$, $1 \mapsto h(\iota)$. 那么也有下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \{0, 1\} & \xrightarrow{f} & * \\ \downarrow g & & \downarrow \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{h'} & \mathbb{Z} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow b \\ \searrow h \end{array}$$

考虑复合 $b \circ a$, 根据上两个图表交换, 有

$$\begin{array}{ccc} \{0, 1\} & \xrightarrow{f} & * \\ \downarrow g & & \downarrow \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{h} & \pi_1(S^1, *) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow b \circ a \\ \searrow \text{id} \end{array}$$

根据 pushout 的唯一性可知 $b \circ a = \text{id}_{\pi_1(S^1, *)}$. 另一方面, $a \circ b = \text{id}_{\mathbb{Z}}$, 因为 1 被映回自己, 这就得到了一个群同构

$$\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}.$$

Covering Spaces