2025秋复变函数期中考试参考答案

一、基本概念

1、写出区域的定义(2')。

连通开集。

2、写出复值函数 $f(z)$ 在区域 Ω 解析的四种等价定义。(2'×4)

(1) $f(z)$ 在 Ω 内处处可导。

(2) $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$，u 与 v 在 Ω 内处处可微且满足 $C-R$ 方程。

(3) $f(z)$ 在 Ω 内每一点的邻域上展成幂级数。

(4) $f(z)$ 在 Ω 内连续，且当有界区域 D 满足 $\overline{D}\subset\Omega$, ∂D 是有限条逐段光滑曲线时，$\int_{\partial D} f(z)dz=0$。

3、写出上述四种定义的等价性证明中使用的定理或思路。(6')

(1)⇒(2) 方向导数相等。

(1)⇒(3) Cauchy 公式。

(1)⇒(4) Cauchy 定理。

(2)⇒(1) 直接计算。

(3)⇒(1) 显然。

(4)⇒(3) Morera 定理。

二、简答题

1、(12')对于以下三种情况，分别写出所有可能的解析自同胚 $f:D\to D$，并简述原因或指明所用定理：(1) $D=D(0,1)$；(2) $D=\mathbb{C}$；(3) $D=\overline{\mathbb{C}}$。

(1) $f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$，$a\in D(0,1)$，$\theta\in\mathbb{R}$。(2')Schwarz 定理。(2')

(2) $f(z)=az+b$，a，$b\in\mathbb{C}$，$a\neq 0$。(2')由 Liouville 定理与 Weierstrass 定理知 ∞ 是极点，从而 f 是多项式。由代数基本定理知 f 是一次多项式。(2')

(3) $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$，$ad-bc\neq 0$(2')。f 是 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的亚纯函数，进而是有理函数。由 f 单可知分子分母均为至多一次多项式。(2')

2、(4'×3)计算。

(1) $I=\int_{|z|=1}\bar{z}dz$；

$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{z}dz=2\pi i$。

(2) $I=\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$，其中 $n\in\mathbb{Z}^+$，a，b 不在圆周 $|z|=R$ 上；

记 $I_1=\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-b)^{-1}|_{z=a}=-2\pi i(b-a)^{-n}$。

记 $I_2=\int_{|z-b|=\varepsilon}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}=2\pi i(z-a)^{-n}|_{z=b}=2\pi i(b-a)^{-n}$。

则 $|a|$，$|b|>R$ 时，$I=0$；$|a|<R<|b|$ 时，$I=I_1$；$|b|<R<|a|$ 时，$I=I_2$；$|a|$，$|b|<R$ 时，若 $a\neq b$，则 $I=I_1+I_2=0$；若 $a=b$，则 $I=0$。(每种情形各1分)

(3) $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $D_1=\{1<|z|<2\}$ 与 $D_2=\{2<|z|<+\infty\}$ 的 Laurent 展开。

在 D_1 上 $f(z)=(z-2)^{-1}-(z-1)^{-1}=-\frac{1}{2}(1-\frac{z}{2})^{-1}-\frac{1}{z}(1-\frac{1}{z})^{-1}=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{+\infty}z^{-k}$。(2')

在 D_2 上 $f(z)=(z-2)^{-1}-(z-1)^{-1}=\frac{1}{z}(1-\frac{2}{z})^{-1}-\frac{1}{z}(1-\frac{1}{z})^{-1}=\sum_{k=1}^{+\infty}(2^{k-1}-1)z^{-k}$。(2')

3.(12')$f(z)$ 在简单闭曲线 γ 的外区域 D 与 γ 上的每一点解析，且 $\lim_{z\to\infty}f(z)=a$。对 $z\notin\gamma$ 求 $F(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw$。

任固定 $z\notin\gamma$，取 R 充分大使得 $D(z,R)\supseteq\gamma$。

若 $z\in D$，则在 $\Omega=D(z,R)\bigcap D$ 使用 Cauchy 公式得 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,R)}\frac{f(w)}{w-z}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw$。注意 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z,R)}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+Re^{i\theta})d\theta\to a(R\to+\infty)$。在上式中令 $R\to+\infty$ 得 $F(z)=a-f(z)$。(选对积分区域或环路3'，正确使用Cauchy公式3',式子最后一项趋于a得3'.)

若 $z\in\mathbb{C}\setminus\overline{D}$，则 Cauchy 定理指出 $0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(w)}{w-z}dw$，从而 $F(z)=a$。(3')

三、证明题

1、γ 为 $\mathbb{C}$ 中的紧致光滑曲线，$\phi(z)$ 为定义在 γ 上的连续函数，则 $F(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\phi(w)}{w-z}dw$ 在 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 解析。

证明：$\cancel{\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\phi(w)dw}{(w-z-\Delta z)(w-z)}$。令 $\Delta z\to 0$，由控制收敛定理，该极限存在为 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\phi(w)dw}{(w-z)^2}$，与 Δz 的收敛过程无关，从而 F 在 z 处可导。

3、非常数的函数 $f(z)$ 在 $1<|z|<+\infty$ 解析，且 $\lim_{z\to\infty}f(z)$ 存在，证明 $|z|>1$ 上最大模原理成立。

证明：令 $g(z)=f(\frac{1}{z})$，补充定义 $g(0)=f(\infty)$，则 g 在 $|z|<1$ 解析，满足最大模原理，从而 f 在 $|z|>1$ 也满足最大模原理。

5、设 $f(z)$ 在圆环 $D=\{1<|z|<2\}$ 解析，在 $\overline{D}$ 连续。若 $\max_{|z|=1}|f(z)|\leq 1$，$\max_{|z|=2}|f(z)|\leq 2$，证明：$|f(z)|\leq|z|$，$\forall z\in D$。

证明：令 $g(z)=\frac{f(z)}{z}$，则 g 在 D 解析，在 $\overline{D}$ 连续，由最大模原理即得。

2.4.(12′) 令 $w=f(z)=ze^{-z}$, 其反函数记为 $F(w)$.

(1)(3′) 其在 $w=0$ 附近有几个解析分支?

(2)(6′) 分别将它们在 $w=0$ 处展开为幂级数;

(3)(3′) 给出对应的收敛半径.

(1) 由于 $w=0\Leftrightarrow z=0$ 且 $f'(0)=1=0$, 由逆映射存在定理*(2')*知只有 1 个解析分支.*(1')*

(2) 假设 $z=F(w)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_nw^n$, 由 *Cauchy* 积分公式 *(2')* 知

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{F(w)}{w^{n+1}}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{z}{(ze^{-z})^{n+1}}(1-z)e^{-z}dz=\frac{n^{n-1}}{n!},$$

其中 Γ 是 $w=0$ 附近很小的 *(*单圈*)* 围道. *(4')* 能作积分换元是因为在 $z=0$ 附近是解析同胚, Γ' 是 $z=0$ 附近很小的 *(*单圈*)* 围道.

(3) 直接用 *Striling* 公式或计算相邻两项系数之比可得计算结果为 $\frac{1}{e}$.*(*结果 *1'*, 计算过程 *2'* *)*

3.2.(8′) 设 $f(z)$ 在 $D(0,1)$ 中解析, 证明存在序列 $\{z_n\}\subset D(0,1)$, 使得其同时满足: (1) $\lim_{n\to\infty}|z_n|=1$; (2) $\lim_{n\to\infty}f(z_n)$ 存在.

证明. 不妨设 f 零点数有限, 否则结论显然. 若结论不成立, 此时任一列 $|z_n|\to1$ 有 $f(z_n)\to\infty$. 记 f 零点的集合为 $\{\omega_i\}$, 令 $g(z)=\frac{f(z)}{\prod(z-\omega_i)}$ (记零点重数), 则 $g(z)$ 在 D(0,1) 上解析无零点, 且边界上为 ∞. 对 $1/g$ 用极大值原理知矛盾. □

3.4.(8′) 设 f 在区域 D 上解析, $|f(z)|\le1$, 且 $e^{f(z)}\in\mathbb{R}$, 证明 f 为常数.

证明. $f(z)$ 的虚部只能取离散值, 用**开映射**原理立得. □