# Notes on Complex Analysis

FE enthusiast enthusiast

2025.09.27

## 课程概要

- 课程名：复变函数
- 周课时：3
- 授课教师：郭帅
- 参考资料：复变函数简明教程，谭小江.

由于这门课基本是抄书，所以笔记不会以课堂笔记的形式进行. 我会记录一些自己的在复变上的一些想法，非常可能不完全正确. 参考资料可能也不会局限于某一本书. 个人更加喜欢从几何，拓扑的角度来研究复变（比如很多定理的表述似乎都能有更多的几何想法在里面）所以可能里面会有一些拓扑，有一些流形（黎曼面）的观点.

# 1 复导数和 Riemann 面

在学习复变的开始我们会遇到复导数 $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{\boldsymbol{z}}}$，它们被形式地记为

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \overline{\boldsymbol{z}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}\right).$$

它们可以“形式地”参与运算，比如说 $f(z)=z^k$ 求偏导就是 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{z}}=kz^{k-1}$ 而 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{\boldsymbol{z}}}=0$. 不过这个定义很奇怪，它当然不应该是一个形式上的东西！我们应当更加正规地来看它，于是我们顺带引入一些复流形（主要是 Riemann 面）中的概念.

类似实流形，我们应当先在每点 $a$ 处给出切向量（切空间），余切向量（余切空间）的定义，然后推广到开集 $U$ 上形成且向量场和微分形式. 在实流形中我们有如下几种定义切向量的方式：

- 几何看法：我们把流形嵌入 $\mathbb{R}^n$ 中，每条过 $a$ 的曲线都会在 $a$ 处给出一个落在 $N$ 维空间中的切向量，全体切向量构成切空间. 这是一个 $n$ 维线性空间（$n$ 维流形维数），它能被可视化在 $\mathbb{R}^N$ 中.
- 内蕴几何看法：我们可以直接用流形上曲线的等价类来表示切向量，这样就不需要嵌入在 $\mathbb{R}^n$ 中.
- 分析看法：切向量是一种算子，它作用在全体实值函数 $C^\infty(U,\mathbb{R})$ 上，给出这个函数沿该切向量的方向导数. 因此在一组局部坐标系下，我们常说 $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x_i}}$ 构成了切空间的一组基，它可以作用在函数 $f$ 上给出 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x_i}}$.
- 抽象看法：我们把上面的概念抽象化，一个微分算子是映射 $D: C^\infty(U,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$，满足线性性 $D(af+bg)=aD(f)+bD(g)$ 和（在 $a$ 处的）Leibniz 法则 $D(fg)=f(a)D(g)+D(f)g(a)$.

在实情形下我们可以这样证明全体导子都有方向导数给出：

$$D(f)=\sum_{i=1}^{n} D(x_i)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x_i}}\bigg|_a.$$

（这里 $D$ 中的 $x_i$ 和偏导中的 $x_i$ 都应被视为函数而非单纯的坐标分量.）对任意线性映射 $T$，它都能被写为 $\sum a_i x_i$ 的形式，从而根据线性有

$$D(T)=\sum D(x_i)\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x_i}}\bigg|_a.$$

但是任何光滑函数都能被近似到线性函数：具体来说，

$$f(x)=f(a)+\int_0^1 \mathrm{d}f|_{tx+(1-t)a}(x-a)\,\mathrm{d}t=f(a)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\int_0^1\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x_i}}\bigg|_{tx+(1-t)a}\mathrm{d}t.$$

所以根据 Leibniz 法则，

$$Df=\sum_{i=1}^{n} D(x_i-a_i)\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x_i}}\bigg|_a=\sum_{i=1}^{n} D(x_i)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x_i}}\bigg|_a.$$

回到复值函数的讨论，自然地我们只需把上面定义里 $D$ 的定义域稍作修改，改为 $C^\infty(U,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ 就可以了. 新的切空间成为复线性空间，如果选定一组局部坐标卡，它可被写为

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x_i}})_{1\le i\le n} = T_aU \otimes \mathbb{C}.$$

所以我们解释了 $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{\boldsymbol{z}}}$ 的确是自然定义的算子，并且它们也可以张成整个切空间. 但是为什么要这样定义呢？从微分（余切空间）的角度来看或许更自然.

在实流形上，余切空间被定义为切空间的对偶空间，或者说 $T_aU$ 上的线性函数构成的空间. 但我们发现余切空间有很好的**外微分**结构，所以之后有不少讨论都围绕余切空间展开. 比如说对每个函数 $f$ 都可以定义 $\mathrm{d}f$，它在 $a$ 处把切向量 $v$ 打到 $D_v(f)$，也就是 $v$ 方向上的方向导数. 在一组局部坐标下，坐标函数 $x_i$ 的微分给出了余切空间的一组基 $\mathrm{d}x_i|_a$. 通过取 $f$ 是 $x_i$ 的线性组合可知，全体 $\mathrm{d}f|_a$ 也给出了全体余切向量.

因此，我们也可以用另一种不涉及到切向量的方法来直接从函数入手定义余切空间（这时反而切空间被视为其对偶来定义.） 观察到如果两个函数在 $a$ 附近的局部形态相同那么它们微分给出相同的值. 具体地，如果两个函数在 $a$ 的某个开邻域 $W$ 上等同，就说它们在 $a$ 附近等价. 定义 $a$ 处的**光滑函数芽**（germ）就是全体光滑函数在 $a$ 处的等价类，记为 $\mathscr{E}_a$，它同样是 $U$ 上的代数. 记

$$\mathfrak{m}_a = \{f \in \mathscr{E}_a,\, f(a) = 0\}, \quad \mathfrak{m}_a^2 = \{f \in \mathscr{E}_a,\, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x_i}}\bigg|_a = 0, \forall i\}.$$

那么就可以定义余切空间是**芽函数的等价类** $\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$. 对每个函数 $f$，$\mathrm{d}f_a$ 就定义为 $f - f(a)$ 所在的等价类. 很明显上面两个定义给出的空间是相同的，我们做的只不过是把全体函数商去那些微分为零的函数. （我目前不知道上面更深的知识，但是确实能够感受到后一种定义方法已经在往代数方向走了.）我们证明 $\mathrm{d}x_a, \mathrm{d}y_a$（把 $x, y$ 看成函数!）仍然是余切空间的一组基，因为根据光滑函数的 taylor 展开，

$$f(z) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(x - x(a)) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}(y - y(a)) + o(z - a).$$

所以

$$\mathrm{d}f_a = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}x_a + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}y_a.$$

现在搬到复值函数上. 在一个复数坐标卡上，$x, y$ 这两个函数分别代表它朝实部，虚部方向的投影. 这时我们发现：$z$ 和 $\overline{z}$ 是在情形下两个更自然的函数（$z$ 就代表恒等映射，还有比恒等映射更自然的东西吗？），根据上面的表达式，我们有

$$\mathrm{d}z_a = \mathrm{d}x_a + \mathbf{i}\,\mathrm{d}y_a, \quad \mathrm{d}\overline{z}_a = \mathrm{d}x_a - \mathbf{i}\,\mathrm{d}y_a.$$

所以 $\{\mathrm{d}z_a, \mathrm{d}\overline{z}_a\}$ 也可以作为余切空间的一组基，可以验证（也可以说定义） 函数 $f$ 在

$z, \overline{z}$ 方向的偏导数就是 $\mathrm{d}f_a$ 在两个分量上的系数.

$$\mathrm{d}f_a = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{z}} \,\mathrm{d}z_a + \frac{\partial f}{\partial \overline{\boldsymbol{z}}} \,\mathrm{d}\overline{z}_a.$$
$$f(z) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{z}}(z-a) + \frac{\partial f}{\partial \overline{\boldsymbol{z}}}(\overline{z}-\overline{a}) + o(z-a).$$

这就说明了为什么复导数在应用时看上去是“形式求导”，并且此时明显要比之前用 $x, y$ 分量从形式看上去更自然. （注意：这两个偏导数应当被放在一起讨论，正如在不同坐标系统下 $x$ 分量对应的坐标函数可以相等，但是 $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}$ 的意义则不同） 研究它们的意图也就水落石出：因为对解析函数 $f$，

$$f(z) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{z}}(z-a) + o(z-a) \Rightarrow \mathrm{d}f_a = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{z}} \,\mathrm{d}f_z.$$

此即 Cauchy-Riemann 方程 $\frac{\partial f}{\partial \overline{\boldsymbol{z}}} = 0$.

## 2 第一次作业

**Problem 1: 习题 2-3**

证明：(1) 如果 $f, \overline{f}$ 均解析，那么 $f$ 为常值函数；

(2) 如果 $f$ 解析，且 $|f|$ 为常值函数，则 $f$ 为常值函数.

*Proof.* (1) 对任意点 $z_0 \in \mathbb{C}$，

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \overline{f}'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{f(z)} - \overline{f(z_0)}}{z - z_0}.$$

两个极限都存在. 分别取 $z = z_0 + \lambda$ 和 $z = z_0 + \lambda \mathbf{i}$（$\lambda \in \mathbb{R}$）得到：

$$\begin{aligned}
\overline{f}'(z_0) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\overline{f(z_0 + \lambda)} - \overline{f(z_0)}}{\lambda} = \overline{\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(z_0 + \lambda) - f(z_0)}{\lambda}} = \overline{f'(z_0)}; \\
\overline{f}'(z_0) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\overline{f(z_0 + \mathbf{i}\lambda)} - \overline{f(z_0)}}{\mathbf{i}\lambda} = \overline{\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \mathbf{i}\lambda) - f(x_0)}{-\mathbf{i}\lambda}} = -\overline{f'(z_0)}.
\end{aligned}$$

从而 $f'(z_0) = 0$，根据 $z_0$ 的任意性 $f$ 为常值函数.

(2) 设 $|f| \equiv c$，则 $\operatorname{im} f \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = c\}$. 如果存在一点 $z_0$ 使得 $f'(z_0) \neq 0$，则 $f$ 把 $z_0$ 的一个开邻域同胚到 $f(z_0)$ 的一个开邻域上. 但是 $\operatorname{im} f$ 没有内点，矛盾. 从而对任意 $z_0$ 均有 $f'(z_0) = 0$，故 $f$ 为常值函数.

**Problem 2: 习题 2-5**

设 $f = u + \mathbf{i}v$ 解析，且 $f'$ 处处非零. 证明：对任意 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$，曲线（?）$u(x, y) = c_1$ 和 $v(x, y) = c_2$ 正交.

*Proof.* 考虑直线 $l_1 = \{z : \operatorname{Re} z = c_1\}$ 和 $l_2 = \{z : \operatorname{Im} z = c_2\}$，则这两条直线在复平面上正交. 由于 $f$ 解析且 $f'$ 处处非零，因此 $f$ 在每点处都是局部同胚，从而对每个 $z$，$f^{-1}(z)$ 都是离散集，选定 $w \in f^{-1}(z)$，则一条从 $z$ 出发的道路可被唯一提升为从 $w$ 出发的一条道路. 所以一条直线的原像是很多条不交的曲线的并.

$f^{-1}(l_1) \cap f^{-1}(l_2) = f^{-1}(c_1 + \mathbf{i}c_2)$，取出任意 $w \in f^{-1}(c_1 + \mathbf{i}c_2)$，则根据局部同胚性仅有 $u$ 中一条曲线和 $v$ 中一条曲线在 $w$ 处相交. 根据解析映射的保角性，这两条曲线的夹角应当和它们像的夹角相同，都是 $\pi/2$. 所以这两条曲线正交，证毕.

**Problem 3: 习题 2-6(1)**

设 $u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. 问：$u(x, y)$ 何时是一个解析函数的实部？如果是，求 $v$ 使得 $f = u + \mathbf{i}v$ 是解析函数.

*Proof.* 我们需要 $u$ 是一个调和函数，求二阶偏导：

$$\Delta u(x, y) = 2a + 2c = 0.$$

所以我们要求 $a+c=0$. 此时对每点 $z_0=x_0+\mathbf{i}y_0\in\mathbb{C}$，考虑一条从 0 到 $z_0$ 的曲线 $\gamma$ 从 $(0,0)$ 横向匀速走到 $(x_0,0)$ 再纵向走到 $(x_0,y_0)$，定义

$$\begin{aligned}v(x_0,y_0)&=\int_\gamma(\partial_x u\,\mathrm{d}y-\partial_y u\,\mathrm{d}x)=\int_\gamma((2ax+by)\,\mathrm{d}y-(bx+2cy))\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{x_0}(-bx+2c\cdot 0)\,\mathrm{d}x+\int_0^{y_0}(2ax_0+by)\,\mathrm{d}y\\&=-\frac{1}{2}bx_0^2+2ax_0y_0+\frac{1}{2}by_0^2.\end{aligned}$$

即 $v=\frac{1}{2}b(y^2-x^2)+2axy$ 满足 $f=u+\mathbf{i}v$ 是解析函数.

**Problem 4: 习题 2-8**

设 $f$ 解析并有连续导函数，且 $f'(z_0)\neq 0$，证明：存在 $z_0$ 的邻域 $U$ 和 $f(z_0)$ 的邻域 $V$，使得 $f:U\to V$ 是双射. 用 C-R 方程证明 $f^{-1}:V\to U$ 也解析.

*Proof.* 设 $f=u+\mathbf{i}v$，将 $f$ 视为 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 的函数. 根据反函数定理，存在 $z_0$ 的邻域 $U$ 和 $f(z_0)$ 的邻域 $V$ 使得 $f:U\to V$ 是 $C^1$ 同胚. 因此局部上反函数存在，根据 $f$ 满足 C-R 方程可知：

$$\mathrm{Jac}_z(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}} & \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{y}}\\ \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{x}} & \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{y}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}} & \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{y}}\\ -\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{y}} & \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}}\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}.$$

根据 $f^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵满足 $\mathrm{Jac}_{f(z)}(f^{-1})\circ\mathrm{Jac}_z(f)=\mathrm{id}$ 可知：

$$\mathrm{Jac}_{f(z)}(f^{-1})=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}.$$

所以 $f^{-1}$ 也满足 C-R 方程，因此是解析的.

**Problem 5: 习题 2-9**

设 $f:(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$ 是区域 $\Omega_1$ 到 $\Omega_2$ 的 $C^\infty$ 同胚. 称 $f$ 是**保面积**的，如果对 $\Omega_1$ 内任意以光滑曲线为边界的有界开集 $O$，$f(O)$ 和 $O$ 的面积都相等.（对任意可测集 $E$ 都有 $m(f(E))=m(E)$?）证明：如果 $f$ 是保面积的，且函数 $f=u+\mathbf{i}v$ 解析，则 $f(z)=e^{\mathbf{i}\theta}z+c$，$\theta\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{C}$.

*Proof.* 根据多元微积分中的换元公式可知，对任意区域 $\Omega$，

$$\int_\Omega 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{f(\Omega)}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_\Omega|\det(\mathrm{d}f)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

如果 $f$ 是保面积的，在每点 $z$ 处我们可以取一串开球 $B_{1/n}(z)$，当 $n$ 足够大时总有 $B_{1/n}(z)\subset\Omega_1$. 根据 $\det(\mathrm{d}f)$ 的连续性，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_{1/n}(z)}|\det(\mathrm{d}f)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=|\det(\mathrm{d}f)(z)|\cdot\left|B_{1/n}(z)\right|.$$

所以 $|\det(\mathrm{d}f)| \equiv 1$. 由于 $\mathrm{d}f$ 是复线性映射，这直接给出 $|f'(z)| = 1$ 恒成立. 由 $f$ 解析可知 $f'$ 解析，根据习题 2-3 结论可知 $f'$ 为常值函数，于是存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得 $f' \equiv e^{\mathrm{i}\theta}$，这也就是说 $(f - e^{\mathrm{i}\theta} z)' \equiv 0$，于是 $f - e^{\mathrm{i}\theta} z \equiv c$. 证毕.

**Problem 6: 习题 2-14**

设 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n$，$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2+1) z^n$.

(1) 如果 $g/f = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$，求 $a_0, a_1, a_2$.

(2) 如果 $f \circ g = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$，求 $a_0, a_1, a_2$.

*Proof.* 把 $f$ 移到右侧，解方程：

$$(z + 4z^2 + 9z^3)(a_0 + a_1 z + a_2 z^2) = 2z + 5z^2 + 10z^3 \pmod{z^4}.$$

即

$$a_0 z + (4a_0 + a_1) z^2 + (9a_0 + 4a_1 + a_2) = 2z + 5z^2 + 10z^3.$$

解得 $a_0 = 2$, $a_1 = -3$, $a_2 = 4$.

第二部分：

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 z + a_2 z^2 &= (2z + 5z^2 + 10z^3) + 4(2z + 5z^2 + 10z^3)^2 \pmod{z^3} \\ &= 2z + 21z^2. \end{aligned}$$

所以 $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 21$.

**Problem 7: 习题 2-15**

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ 收敛，证明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛并且其和与求和顺序无关.

*Proof.* 只需证明 $\sum_{n=0}^{k} a_n$ 是 Cauchy 列. 由于 $\sum_{n=0}^{k} |a_n|$ 是 Cauchy 列，因此对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$ 使得对任意 $n > m > N$ 均有

$$\sum_{i=m}^{n} |a_i| < \varepsilon.$$

所以

$$\left| \sum_{i=m}^{n} a_i \right| \le \sum_{i=m}^{n} |a_i| < \varepsilon.$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛.

再证明与求和顺序无关：对任意 $\varepsilon > 0$，设 $N$ 满足 $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. 无论按什么顺序，总存在一个时刻 $N'$ 使得对任意 $m > N'$ 均有 $\sum_{n=0}^{m} a_{\sigma(n)}$ 包含 $a_1, \dots, a_N$，从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{m} a_{\sigma(n)}$$

中 $a_1$ 至 $a_N$ 项系数均为零，之后的项系数可能为 1 或 0，所以

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{m} a_{\sigma(n)}\right| \leq \sum_{n=N'}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

所以后者的极限就是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

**Problem 8: 习题 2-20**

设 $f$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，并将上半平面映到上半平面，将实轴映到实轴. 证明在实轴上 $f'(z) \geq 0$.

*Proof.* 任选 $z \in \mathbb{R}$，首先根据 $f$ 把实轴映到实轴可知

$$f'(z) = \lim_{w \to z, q \in \mathbb{R}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \in \mathbb{R}.$$

如果 $f'(z) < 0$，根据 $\operatorname{Re} f(z + \lambda \mathbf{i}) > 0$ 对 $\lambda > 0$ 成立可知

$$\arg \frac{f(z + \lambda \mathbf{i}) - f(z)}{\lambda \mathbf{i}} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

但是 $\lambda \to 0$ 时上式的辐角应当趋向于 $f'(z)$ 的辐角，即 $-\pi$，矛盾.

**Problem 9: 习题 2-22**

(1) 设 $z_1, z_2$ 是单位圆中任意两个互不相等的点，证明存在单位圆到自身的分式线性变换 $L$，使得 $L(z_1) = 0, L(z_2) > 0$. 问：这样的分式线性变换是否唯一？

(2) 设 $L$ 是 (1) 中给定的分式线性变换，证明：$L^{-1}$ 将实轴变为和过 $z_1, z_2$ 并和单位圆周垂直的圆.

*Proof.* (1) 我们证明这样的 $L$ 存在：由于 $L$ 保单位圆而分式线性变换都保反演对应点，我们记一个点 $z$ 关于单位圆的反演对应点为 $z^*$. 所以要想 $L(z_1) = 0$，只需 $L(z_1^*) = \infty$. 这样只需要关于一个以 $z_1^*$ 为圆心而和单位圆正交的圆作反演（这是能做到的：因为 $z_1^*$ 在圆外，以 $Oz_1^*$ 为直径作圆和单位圆交于 $A, B$ 两点，以 $|z_1^* A|$ 为半径作圆即可.

此时 $z_2$ 仍然在圆内，考虑一个旋转把 $z_2$ 送到正实轴上，这样不改变 $L(z_1) = 0$ 而使 $L(z_2) > 0$.

再证明变换是唯一的，我们来证明 $L(z_2)$ 的位置固定. 这是因为考虑过 $z_1, z_2$ 的和单位圆正交的圆与单位圆交点 $\xi_1, \xi_2$，那么复交比 $(\xi_1, \xi_2; z_1, z_2)$ 在分式线性变换下不变，并且由于这个圆的像是过 $L(z_1), L(z_2)$ 和单位圆正交的圆（就是实轴），所以 $\{L(\xi_1), L(\xi_2)\} = \{\pm 1\}$，

$$(1, -1; 0, L(z_2)) = \frac{1}{1 - L(z_2)} : \frac{-1}{-1 - L(z_2)} = \frac{1 + L(z_2)}{1 - L(z_2)}.$$

于是 $\frac{1+L(z_2)}{1-L(z_2)}=(\xi_1,\xi_2;z_1,z_2)$ 或者 $\frac{1-L(z_2)}{1+L(z_2)}=(\xi_1,\xi_2;z_1,z_2)$，显然这两个方程的根互为相反数，负根被舍去，正根就是 $L(z_2)$ 的固定值记为 $p$. 所以 $L$ 是把 $z_1,z_2,z_1^*$ 送到 $0,p,\infty$ 的分式线性变换，这样的变换唯一.

(2) 上面的论述已经说明了.

**Problem 10: 习题 2-27**

设给定的四个点 $z_1,z_2,z_3,z_4$ 按顺序位于圆周 $K$ 上，证明其交比

$$(z_1,z_2;z_3,z_4)>0.$$

*Proof.* 首先考虑 $z_1$ 和 $z_4$ 之间不含 $z_2,z_3$ 的那段弧上一点，以该点为圆心任意半径作反演，那么得到一条直线，并且 $z_1,z_2,z_3,z_4$ 顺次分布. 再通过旋转，平移和翻折不妨设该直线为实轴并且 $z_j$ 从左到右排列在实轴上，整个过程中交比不改变. 此时 $z_1-z_3,z_2-z_3,z_1-z_4,z_2-z_4$ 都小于零，于是

$$(z_1,z_2;z_3,z_4)=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}>0.$$

**Problem 11: 习题 2-29**

设 $a_1,a_2,a_3,a_4$ 两两不等，求

$$f=\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}$$

单值解析函数存在的最大区域.

*Proof.* 首先 $f$ 在 $a_1,a_2,a_3,a_4$ 处不解析，并且在剩余区域上都是双值函数. 记 $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，并任取一个基点 $*$. 对任何 $z\in\Omega$, $w\in f(z)$ 和以 $z$ 为起点的一条道路 $\gamma$，$f$ 把 $\gamma$ 提升为一条以 $w$ 为起点的道路. 设 $\gamma$ 的终点为 $z'$，定义 $\gamma_*:f(z)\to f(z')$ 把 $w\in f(z)$ 送到 $\gamma$ 在 $w$ 处提升所得道路的终点. 由于 $f(z),f(z')$ 都是离散集，因此同伦的道路给出的 $\gamma_*$ 是相同的. 从而逆道路 $\gamma^{-1}$ 给出的 $\gamma_*^{-1}$ 满足 $\gamma_*\gamma_*^{-1}=\gamma_*^{-1}\gamma_*=\mathrm{id}$，所以 $\gamma_*$ 是集合间的双射，由于集合大小为 2，只有两种双射.

如果对任意区域 $D$ 上以 $*$ 为基点的回路 $\gamma:[0,1]\to D$ 均有 $\gamma_*=\mathrm{id}$，那么任取 $\star\in f(*)$，对任意 $z\in D$ 考虑一条从 $*$ 到 $z$ 的道路 $\phi$，定义 $g(z)=\phi_*(\star)$. 不同的路径 $\phi$，$\phi'$ 满足 $\phi_*=\phi'_*$，否则会导致 $\phi_*^{-1}\phi'_*\neq\mathrm{id}$，矛盾. 这样 $g$ 就是一个单值解析分支，反之如果单值解析分支存在也一定要求基点处的回路满足 $\gamma_*=\mathrm{id}$（否则 $\gamma_*$ 会把两个元素交换，这是不行的），因此该条件是充要的.

根据同伦不变性，只需考察 $\pi_1(\Omega,*)\to\mathrm{Aut}(f(*))\cong\{\pm1\}$，$[\gamma]\mapsto[\gamma_*]$ 的作用效果. 根据拓扑学的知识，$\pi_1(\Omega,*)$ 是有 4 个生成元的自由群，4 个代表元分别为恰好内部包含某个 $z_i$ 的圈（记为 $\gamma_i$），我们具体考虑某个 $\gamma_i$.

记 $f_i(z)=\sqrt{z-z_i}$，那么对任意 $j\neq i$，$\gamma_j$ 零伦，从而 $(\gamma_j)_*=\mathrm{id}$. 但是回路 $\gamma_i$ 辐角总变化为 $2\pi$，所以 $(\gamma_i)_*$ 会交换集合内的两个点. 由于函数的乘法也是连续的，将这些终点相乘可以发现 $f_*\neq\mathrm{id}$，于是它会交换 $f(*)$ 中的两个点. 所以 $\pi_1(\Omega,*)$ 中每个代表元都被送到 $-1$，即我们希望区域 $\Omega$ 中仅存在同伦于偶数个代表元相加而得的那些圈. 一种方法是去掉两条分别连接 $z_1z_2$ 和 $z_3z_4$ 的不交曲线，这样 $\gamma_1\gamma_2$ 和 $\gamma_3\gamma_4$ 就必须一起出现，从而构成一个最大区域（任意添加一点都不满足要求）.

# 3 第二次作业

**Problem 12: 习题 3-1**

如果 $f$ 是区域 $\Omega$ 上的解析函数，$\gamma: t\mapsto z(t), t\in[0,b]$ 是 $\Omega$ 中一光滑曲线，$f$ 在 $\gamma$ 上处处不为零. 令 $\Gamma$ 是由 $t\mapsto f(z(t)), t\in[0,b]$ 定义的曲线，证明变元替换公式

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}.$$

*Proof.* 把积分拉回到曲线 $\gamma$ 上：

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z&=\int_0^b \frac{f'(z(t))}{f(z(t))}z'(t)\,\mathrm{d}t,\\ \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}&=\int_0^b \frac{(f\circ z)'(t)}{f\circ z(t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{f'(z(t))}{f(z(t))}z'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

所以两式相等.

**Problem 13: 习题 3-3**

设 $\gamma$ 是 $\mathbb{C}$ 中一光滑曲线，$\phi(z)$ 是 $\gamma$ 上的连续函数，利用倒数定义证明：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_\gamma \frac{\phi(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

在 $\mathbb{C}-\gamma$ 上解析.

*Proof.* 任取 $z,z_1\in\mathbb{C}-\gamma$，

$$f(z_1)-f(z)=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_\gamma \frac{\phi(w)}{w-z_1}-\frac{\phi(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_\gamma \frac{\phi(w)(z_1-z)}{(w-z_1)(w-z)}\,\mathrm{d}w.$$

由于 $\mathbb{C}-\gamma$ 是开集，因此存在 $d>0$ 使得 $B_d(z)$ 和 $\gamma$ 无交，即 $|w-z|\geq d$ 对任意 $w\in\gamma$ 成立. 所以对任意 $z_1$ 满足 $|z-z_1|<\varepsilon<d$，均有 $z_1\notin\gamma$，并且积分

$$\left|\int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w-z_1)(w-z)}\,\mathrm{d}w\right|\leq\frac{L(\gamma)}{d(d-\varepsilon)}$$

有界并且函数一致连续，所以

$$\lim_{z_1\to z}\frac{f(z_1)-f(z)}{z_1-z}=\lim_{z_1\to z}\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w-z_1)(w-z)}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_\gamma \frac{\phi(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w.$$

故复导数存在.

**Problem 14: 习题 3-5**

设 $f$ 在区域 $\Omega$ 上解析，$z_0 \in \Omega$. 证明：

(1) $f$ 在 $z_0$ 邻域内可展开为 $z - z_0$ 的幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

(2) 此幂级数的收敛半径大于等于 $\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$，

(3) 如果 $f$ 为 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 上的实函数，在 $x_0$ 处展开的 Taylor 级数收敛于 $f$，且这一级数的收敛半径 $R > r$，则对任意 $x' \in (x_0 - r, x_0 + r)$，$f$ 在 $x'$ 处展开的 Taylor 级数收敛于 $f$.

*Proof.* (1) 取 $z_0$ 的开邻域 $B_r(z_0)$ 使得 $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$，则可通过对 $\partial B_r(z_0)$ 使用 Cauchy 公式证明 $f$ 在 $B_r(z_0)$ 上可被展开为幂级数 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. 根据幂级数的求导法则可知

$$f^{(m)}(z_0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n\right)^{(m)}(z_0) = m!a_m.$$

所以 $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

(2) 在上一问中取 $r_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$，根据最短距离的定义可知确实有 $B_{r_0}(z_0) \subset \Omega$. 所以对任意 $r < r_0$ 都有 $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$，所以收敛半径大于等于 $r$. 根据任意性可知收敛半径大于等于 $\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

(3) 由于 $f$ 在 $x_0$ 处可展开为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 的形式，并且收敛半径为 $R > r$，那么我们可以直接用幂级数的形式来代替 $f$. $f$ 可延拓为 $B_r(x_0) \subset \mathbb{C}$ 上的幂级数 $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. 根据收敛性，$f$ 是 $B_r(x_0)$ 上的解析函数，所以每点处的 Taylor 级数都收敛于 $f$. 特别地，$f$ 在 $x'$ 处展开的 Taylor 级数收敛于 $f$（因为幂级数的实导数和复导数相同）.

**Problem 15: 习题 3-6**

计算积分：

$$\int_{|z+\mathbf{i}|=1} \frac{e^z}{1+z^2}\,\mathrm{d}z, \quad \int_{|z|=1} \overline{z}\,\mathrm{d}z.$$

*Proof.* 第一个函数在 $\mathbb{C} - \{\pm\mathbf{i}\}$ 上都是解析的，$f(z) = \frac{e^z}{z-\mathbf{i}}$ 在 $\mathbb{C} - \{\mathbf{i}\}$ 上是解析的，因此可使用 Cauchy 型积分得到：

$$\int_{|z+\mathbf{i}|=1} \frac{e^z}{(z+\mathbf{i})(z-\mathbf{i})}\,\mathrm{d}z = \int_{|z+\mathbf{i}|=1} \frac{f(z)}{z+\mathbf{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i} \cdot f(-\mathbf{i}) = -\pi e^{-\mathbf{i}}.$$

第二个函数可以考虑 $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(\theta) = e^{\mathbf{i}\theta}$，

$$\int_{|z|=1} \overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} e^{-\mathbf{i}\theta} \cdot \mathbf{i}e^{\mathbf{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathbf{i}.$$

**Problem 16: 习题 3-7**

计算：

$$(1) \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+3)^2}; \quad (2) \int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)}$$

*Proof.* (1) 当 $n \neq -1$ 时，

$$\int_{|z|=2} z^n\,\mathrm{d}z = \int_{|z|=2} \mathrm{d}(\frac{1}{n+1}z^{n+1}) = 0.$$

当 $n = -1$ 时，

$$\int_{|z|=2} z^{-1}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} e^{-\mathbf{i}\theta}\mathbf{i}e^{\mathbf{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathbf{i}.$$

函数 $f(z) = (z+3)^{-2}$ 在 $\overline{B_2(0)}$ 上解析，于是可展开为幂级数形式.

$$(z+3)^{-2} = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2}z^2 + \dots$$

计算知 $f'(z) = -2(z+3)^{-3}$，$f''(z) = 6(z+3)^{-4}$，所以 $f''(0) = 6 \cdot 3^{-4} = 2/27$. 因此

$$\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z^3}\,\mathrm{d}z = \int_{|z|=2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} z^{n-3}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathbf{i} \cdot \frac{f''(0)}{2} = \frac{2\pi\mathbf{i}}{27}.$$

(2) 分情况讨论. 如果 $a, b$ 都不在圆盘内，则积分结果为 0. 如果 $a, b$ 都在圆盘内，那么由于 $f$ 明显地能延拓到 $\infty$ 处，并且 $f(\infty) = 0$. 所以在 $S^2$ 上曲线 $|z| = R$ 零伦，因此积分结果也为 0. 如果 $a$ 在圆盘内而 $b$ 在圆盘外，则我们需要考虑 $(z-b)^{-1}$ 在 $a$ 点处的 Taylor 展开的第 $n-1$ 项系数. 易知

$$[(z-b)^{-1}]^{(n-1)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(z-b)^{-n}.$$

所以其系数为 $(-1)^{n-1}(n-1)!(a-b)^{-n}/(n-1)! = (-1)^{n-1}(a-b)^{-n}$. 于是积分结果为 $2\pi\mathbf{i} \cdot (-1)^{n-1}(a-b)^{-n}$. 当 $a$ 在圆盘外而 $b$ 在圆盘内时，积分直接为 Cauchy 型积分，结果为 $\frac{2\pi\mathbf{i}}{(b-a)^n}$.

**Problem 17: 习题 3-8**

设 $f$ 在 $D_0(z_0, R) = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ 上解析，证明：存在常数 $c$，使 $f(z) - \frac{c}{z-z_0}$ 在 $D_0(z_0, R)$ 上有原函数.

*Proof.* 这是因为存在 $c$ 使得

$$\int_{\partial D(z_0, R/2)} \frac{c}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 2c\pi\mathbf{i} = \int_{\partial D(z_0, R/2)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

而 $D_0(z_0,R)$ 中任意回路都同伦于 $n$ 个圈连接起来所得结果，因此对任意回路 $\gamma$ 均有

$$\int_\gamma f(z)-\frac{c}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=0.$$

因此从任何一点 $z_1\in D_0(z_0,R)$ 出发，为每个 $w$ 选定一条从 $z_1$ 到 $w$ 的道路 $\gamma(z_1,w)$，可以给出良定义的函数

$$F(w)=\int_{\gamma(z_1,w)} f(z)-\frac{c}{z-z_0}\,\mathrm{d}z.$$

特别地，对任意一个方向，都可以选取一个 $\gamma(z_1,w)$ 使得曲线最终以该方向靠近 $w$，所以在任意方向上求导结果都是 $f(w)-\frac{c}{w-z_0}$，从而 $F$ 给出 $f(z)-\frac{c}{z-z_0}$ 的原函数.

**Problem 18: 习题 3-15**

设 $f$ 在区域 $\Omega$ 上解析但不是多项式，证明：存在 $z_0\in\Omega$，使得对任意 $n$，均有 $f^{(n)}(z_0)\neq 0$.

*Proof.* 考虑 $P_n=\{z\in\Omega: f^{(n)}(z)=0\}$. 如果 $P_n$ 不是孤立集，则根据 $f^{(n)}$ 的解析性，$f^{(n)}$ 在 $\Omega$ 上恒为零，所以 $f$ 的更高阶导数也在 $\Omega$ 上恒为零. 因此每点处的 Taylor 展开从 $f^{(n)}(z)$ 开始全为零，故每点附近 $f$ 都展现为多项式. 设某个 $z$ 附近有 $f=P$，则 $P$ 的定义域显然可延拓到整个 $\mathbb{C}$ 上，并且仍然是解析函数. 这导致 $f$ 和 $P$ 在一个开集上等同，所以在整个 $\Omega$ 上均等同. 这导致 $f=P$，与题目条件矛盾!

因此 $P_n$ 中无极限点，所以 $P_n$ 为可数集，$\bigcup_{n=1}^\infty P_n$ 也为可数集. 但区域 $\Omega$ 中含有不可数个顶点，因此存在 $z_0$ 使得 $f^{(n)}(z_0)\neq 0$ 对任意 $n$ 成立.

**Problem 19: 习题 3-18**

设 $f$ 在 $\overline{B_1(0)}$ 的邻域上解析，令 $\gamma=f(\partial B_1(0))$. 证明：$\gamma$ 的弧长 $L\geq 2\pi\,|f'(0)|$.

*Proof.* 考虑参数化 $\phi:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $\theta\mapsto e^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\gamma=f\circ\phi$. 因此

$$L=\int_0^{2\pi}|(f\circ\phi)'(\theta)|\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left|f'(e^{\mathrm{i}\theta})\cdot\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\right|\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left|f'(e^{\mathrm{i}\theta})\right|\mathrm{d}\theta.$$

根据 $f$ 在 $\overline{B_1(0)}$ 邻域上解析可知 $f'$ 可展开为幂级数，从而存在解析函数 $g$ 使得对任意 $\theta$ 均有

$$f'(e^{\mathrm{i}\theta})=f'(0)+e^{\mathrm{i}\theta}\cdot g(e^{\mathrm{i}\theta}).$$

另一方面，

$$0=\int_{S^1} g\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

所以

$$\int_0^{2\pi} \left|f'(e^{\mathrm{i}\theta})\right| \mathrm{d}\theta \geq \left|\int_0^{2\pi} f'(e^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta\right| = \left|\int_0^{2\pi} f'(0)\,\mathrm{d}\theta\right| = 2\pi\left|f'(0)\right|.$$

**Problem 20: 习题 3-19**

设 $f$ 将 $D(0,1)$ 单叶地映为 $D$，证明：$D$ 的面积 $A(D) \geq \pi\left|f'(0)\right|^2$.

*Proof.* 根据面积公式，

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_{A(D)} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D \left|\det \mathrm{d}f\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D \left|f'\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 r \int_0^{2\pi} \left|f'(re^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

根据上题结论，令 $g(z) = (f')^2(rz)$，则

$$\int_0^{2\pi} \left|f'(re^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left|g(e^{\mathrm{i}\theta})\right| \mathrm{d}\theta \geq 2\pi\left|g'(0)\right| = 2\pi\left|f'(0)\right|^2.$$

所以

$$A(D) \geq \int_0^1 r\cdot 2\pi\left|f'(0)\right|^2 \mathrm{d}r = \pi\left|f'(0)\right|^2.$$

**Problem 21: 习题 3-20**

设非常数的函数 $f$ 在 $1 < |z| < \infty$ 上解析，且 $\lim_{z\to\infty} f(z)$ 存在，记为 $f(\infty)$. 证明：

(1) $f(\infty) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(Re^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta$，$R > 1$.（没看懂原题为什么对 $|z| = R$ 求积分.）

(2) 在 $z > 1$ 上最大模原理成立.

*Proof.* 条件告诉我们 $f$ 可定义在 Riemann 球面 $S^2$（我们就把它等同为 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$）中 $D(0,1)$ 的外部. 定义 $\phi : \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, $z \mapsto 1/z$. 则 $f\circ\phi$ 是 $\overline{B(0,1)} \to \mathbb{C}$ 的解析函数，则它可进行幂级数展开. 设 $f\circ\phi(z) = (f\circ\phi)(0) + z\cdot g(z)$，$g$ 为解析函数. 则根据 Cauchy 定理，

$$0 = \int_{|w|=1/R} g(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^{2\pi} g(e^{\mathrm{i}\theta}/R)\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f\circ\phi)(e^{-\mathrm{i}\theta}/R)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f\circ\phi)(0)\,\mathrm{d}\theta = f(\infty).$$

由于 $f\circ\phi$ 在 $B(0,1)$ 上最大模原理成立，因此 $f\circ\phi$ 在 $B(0,1)$ 上模长无法取到最大值，即 $f$ 在 $z > 1$ 时模长无法取到最大值.

# 4 第三次作业

**Problem 22: 3-22**

设 $f$ 在 $D(0,1)$ 上解析，证明：存在序列 $\{z_n\} \subset D(0,1)$，使得其同时满足：

(1) $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$；

(2) $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ 存在.

*Proof.*

**Problem 23: 3-25**

证明如果 $f$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析且 $L^2$，则 $f \equiv 0$.

*Proof.* 根据 Cauchy 不等式，平方可积函数一定是可积的. 根据平均值原理，对任意 $z \in \mathbb{C}$ 均有

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\pi R^2} \int_{|w-z|\leq R} |f(z)| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \frac{1}{\pi R^2} \|f\|_{L^1}$$

对任意 $R > 0$ 成立，令 $R \to \infty$ 可知 $|f(z)| = 0$，即 $f \equiv 0$ 成立.

**Problem 24: 3-27**

设 $f$ 在 $D(0,1)$ 上解析，$\operatorname{Re} f(z) \geq 0$, $f(0) = a > 0$，证明

$$\left|\frac{f(z)-a}{f(z)+a}\right| \leq |z|, \quad |f'(0)| \leq 2a.$$

若 $a = 1$，则

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

*Proof.* 由于 $f$ 在 $D(0,1)$ 上解析，故它可展开为幂级数形式 $f(z) = f(0) + f'(0)z + \ldots$，因此

$$g(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{f(z)-a}{z}$$

也是解析函数. 又因为 $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ 对任意 $z \in D(0,1)$ 成立，故

$$f(z) + a \neq 0, \quad |f(z)-a| \leq |f(z)+a|, \quad \forall\, z \in D(0,1).$$

后者是因为 $f(z)$ 总是落在复数 $a, -a$ 的垂直平分线的右侧. 从而函数

$$h(z) = \frac{g(z)}{f(z)+a}$$

也是解析函数. 对任意 $z \in D(0,1)$，选择 $|z| < R < 1$，则根据最大模原理

$$|h(z)| \leq \max_{|z|=R} |h(z)| \leq \max_{|z|=R} \frac{1}{|z|} = \frac{1}{R}.$$

令 $R\to 1$ 即可得 $|h(z)|\le 1$. 特别地当 $z=0$ 时 $g(0)=f'(0)$，$f(0)+a=2a$，所以上式变为 $|f'(0)/2a|\le 1$. 特别地令 $a=1$，则上式变为

$$|z|\ge\frac{|f(z)-1|}{|f(z)+1|}\ge\frac{\max\left(1-|f(z)|,|f(z)|-1\right)}{1+|f(z)|}.$$

化简即得结论.

**Problem 25: 3-28**

如果 $f$ 是从上半平面到自身的解析同胚，证明

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ad-bc>0.$$

*Proof.* $\overline{\mathbb{C}}$ 上的解析同胚

$$\Phi(z)=\frac{1+\mathbf{i}z}{z+\mathbf{i}}$$

把上半平面同胚到圆盘 $D(0,1)$. 因此对任意上半平面的解析自同胚 $f$，$\Phi f\Phi^{-1}$ 都是单位圆盘到自身的解析自同胚. 同样地，选取任何一个单位圆盘的解析自同胚 $g$，$\Phi^{-1}g\Phi$ 也一定给出一个上半平面到自身的解析自同胚. 因此 $f$ 一定形如 $\Phi^{-1}g\Phi$. 根据单位圆盘中的结论，对 $g=e^{\mathbf{i}\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$，

$$\begin{aligned}
f(z)&=\Phi^{-1}\circ g\left(\frac{1+\mathbf{i}z}{z+\mathbf{i}}\right)\\
&=\Phi^{-1}\left(e^{\mathbf{i}\theta}\frac{(\mathbf{i}-z_0)z+(1-z_0\mathbf{i})}{(1-\overline{z_0}\mathbf{i})z+(\mathbf{i}-\overline{z_0})}\right)\\
&=\frac{(1-\overline{z_0}\mathbf{i})z+(\mathbf{i}-\overline{z_0})-\mathbf{i}e^{\mathbf{i}\theta}[(\mathbf{i}-z_0)z+(1-z_0\mathbf{i})]}{e^{\mathbf{i}\theta}[(\mathbf{i}-z_0)z+(1-z_0\mathbf{i})]-\mathbf{i}(1-\overline{z_0}\mathbf{i})z-\mathbf{i}(\mathbf{i}-\overline{z_0})}.
\end{aligned}$$

令 $e^{\mathbf{i}\theta/2}(1+\mathbf{i}z_0)=A$，$e^{\mathbf{i}\theta/2}(1-\mathbf{i}z_0)=B$，则上式可写为

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{\overline{A}z+\mathbf{i}\overline{B}+Az-\mathbf{i}B}{\mathbf{i}Az+B-\mathbf{i}\overline{A}z+\overline{B}}\\
&=\frac{\operatorname{Re}Az+\operatorname{Im}B}{-\operatorname{Im}Az+\operatorname{Re}B}.
\end{aligned}$$

所以 $f$ 一定可写为 $\frac{az+b}{cz+d}$ 的形式，四个系数都是实数. 另一方面，所有这样的 $f$ 只要 $ad-bc\neq 0$ 就给出 $\overline{\mathbb{C}}$ 到 $\overline{\mathbb{C}}$ 的解析自同胚. 由于系数都是实数，因此 $f$ 把 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 送到 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，故只需验证 $f$ 是否把上半平面中一点打到上半平面内. 考虑 $z=\mathbf{i}$，

$$\frac{a\mathbf{i}+b}{c\mathbf{i}+d}=\frac{(a\mathbf{i}+b)(-c\mathbf{i}+d)}{c^2+d^2}=\frac{bd+ac+(ad-bc)\mathbf{i}}{c^2+d^2}.$$

所以 $f$ 把上半平面映到上半平面当且仅当 $ad-bc>0$，这就证明了题目结论.

**Problem 26: 3-32**

设 $f$ 在圆环 $D=\{z:1<|z|<2\}$ 上解析，在 $\overline{D}$ 上连续，如果

$$\max_{|z|=1}|f(z)|\le 1,\quad \max_{|z|=2}|f(z)|\le 2;$$

证明

(1) $\forall z\in D$, $|f(z)|\le |z|$;

(2) 如果 $f(z)\neq e^{\mathrm{i}\theta}z$，且在 $|z|=1$ 上恒有 $|f|\equiv 1$，在 $|z|=2$ 上恒有 $|f|\equiv 2$，则 $f$ 在圆环 $\{z:1<|z|<2\}$ 上有零点.

*Proof.* (1) $g(z)=f(z)/z$ 在 $D$ 上解析，在 $\overline{D}$ 上连续. 根据 $\overline{D}$ 的紧性设 $g$ 在 $z_0$ 处取到模长最大值，则根据最大模原理 $z_0\notin D$. 因此对任意 $z\in D$ 均有

$$|g(z)|\le \max_{w\in\partial D}\frac{|f(w)|}{|w|}.$$

分 $w\in\{|z|=1\}$ 和 $w\in\{|z|=2\}$ 两种情形，都能推出边界上最大值为 1，因此 $|f(z)|\le |z|$.

(2) 如果 $g$ 为常值映射，那么根据它在边界处保模长可知存在 $\theta$ 使得 $f(z)=e^{\mathrm{i}\theta}z$，矛盾. 下假设 $g$ 在 $D$ 上不是常值映射. 设 $g$ 在 $z_0\in\overline{D}$ 处取模长最小值. 如果 $z_0\in\partial D$，那么 $|g(z_0)|=1$，那么 $g$ 在 $D$ 上模长恒为 1，这导致 $g$ 是常值映射，矛盾!

所以 $z_0\in D$. 如果 $|g(z_0)|\neq 0$，那么根据 $g$ 是开映射它把 $z_0$ 的邻域送到 $g(z_0)$ 的邻域，一定存在邻域内一个点的模长比 $g(z_0)$ 小，矛盾. 所以 $g(z_0)=0$，这导致 $f(z_0)=0$，证毕.

**Problem 27: 3-34**

设 $\mathrm{d}s=\dfrac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$ 是圆盘 $D(0,1)$ 的非欧度量.

(1) 证明：对 $z_1,z_2\in D(0,1)$，过 $z_1,z_2$ 且和圆周 $|z|=1$ 垂直的圆弧是 $D(0,1)$ 中连结 $z_1,z_2$ 的最短曲线（测地线）. 问：这样的测地线是否唯一?

(2) 设 $l$ 是 $D(0,1)$ 中对 $\mathrm{d}s$ 给定的一条测地线，$P\in D(0,1)$ 是 $l$ 外任给的一点，证明过 $P$ 有 $D(0,1)$ 中无穷多条测地线不与 $l$ 相交.

*Proof.* (1) 这样的测地线是唯一的. 先考虑 $z_1=0$，$z_2=r\in(0,1)$ 的情形. 此时任取曲线 $\gamma:[0,1]\to D(0,1)$，起点为 $z_1$，终点为 $z_2$，则

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathrm{d}s&=\int_0^1\frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\,\mathrm{d}t\\&\ge\int_0^1\frac{x'(t)}{1-|x(t)|^2}\,\mathrm{d}t=\left(\frac12\log\frac{1+x(t)}{1-x(t)}\right)\Big|_0^1=\frac12\log\frac{1-z_2}{1+z_2}.\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $|\gamma(t)| = |x(t)|$ 恒成立且 $x'(t) \geq 0$ 恒成立. 这导致 $\gamma$ 只能是从 $z_1$ 到 $z_2$ 的直线段，并且不同的 $\gamma$ 之间只差一个参数变换. 由于对圆盘内任意两点 $z_1, z_2$ 都存在一个解析自同胚把 $0$ 打到 $z_1$，把 $r$ 打到 $z_2$，同时把 $0, r$ 之间的测地线打到 $z_1, z_2$ 之间的测地线. 于是这个解析同胚给出了 $0, r$ 之间测地线和 $z_1, z_2$ 之间测地线的一一对应，从而任何 $z_1, z_2$ 之间的测地线均唯一.

(2) 我们先考虑 $P = 0$ 的情形，此时 $l$ 是欧氏空间中和单位圆正交的一段不过原点的圆弧，设这个圆圆心为 $A$，和单位圆一个交点为 $B$，那么 $\triangle ABO$ 是直角三角形，因此 $O$ 在 $\odot A$ 的外侧. 适当旋转可使 $\odot A$ 完全落在虚轴的左侧. 此时存在 $\varepsilon$ 使得整块区域 $|\mathrm{Re}\, z| \leq \varepsilon$ 和圆弧无交，这块区域中已经可以划出无穷条直径，因此过 $O$ 有无穷多条测地线和 $l$ 不相交.

对一般的 $P$ 使用一个解析自同胚可将 $P$ 映到 $0$，把 $l$ 映到 $l'$. 选出无穷个与 $l'$ 不交的测地线，它的原像就是无穷多和 $l$ 不交的过 $P$ 的测地线，证毕.