

# Notes on Homology Theory

FE enthusiast enthusiast

2025.09.10

## 课程概要

- 课程名：同调论 (研本课)
- 周课时：3
- 授课教师：谢羿
- 给分方法：作业 40% + 期末 60%，作业两周一次
- 参考资料：姜伯驹，同调论。一学期应该会讲完整本书，并会适当的在一些位置补充新的看法。

## Week 1: 2025/9/10 2025/9/12

# 1 奇异同调论

## 1.1 一些准备

我们先进行一些抽象的代数准备工作，尚且和“拓扑”没有关系。

**Definition 1.1.1 (链复形).** 链复形由下述资料构成：对每个  $q \in \mathbb{Z}$  选取一个 Abel 群  $C_q$ ，以及 Abel 群之间的群同态  $C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}$ ，构成一条链

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2} \longrightarrow \cdots$$

满足  $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0, \forall q \in \mathbb{Z}$ .  $\partial$  被称为边缘映射。

链复形的记号记作  $C_*$ 。

*Remark.* 实际上对任何环  $R$  都能定义类似的事情，只需要把 Abel 群替换成  $R$ -模即可。链复形构成的范畴我们记作  $\text{Ch}(\text{Ab})$ （一般的是  $\text{Ch}(R\text{-Mod})$ ）。

**Definition 1.1.2 (同调群).** 对一个链复形  $C_*$ ，定义它的第  $q$  个同调群为

$$H_q(C_*) = \ker \partial_q / \text{im } \partial_{q+1}.$$

如果  $a \in C_q$  满足  $\partial_q a = 0$ ，就称其为一个闭链 (closed chain) 或者一个环 (cycle)。

如果  $a \in C_q$  满足  $\exists b \in C_{q+1}$  s.t.  $\partial_{q+1} b = a$ ，就称其为一个恰当链 (exact chain) 或者边界 (boundary)。

同调群是整个课程关注的一个核心，我们要分清楚那些命题是同调群层面的，哪些是链复形层面的。

**Example 1.1.3 (de Rham).** 我们知道对一个微分形式

$$\alpha = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

可以定义它的外微分

$$d\alpha = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

可以验证  $d \circ d = 0$ ，把该运算延拓到整个  $n$ -form 上，注意到对微分形式来说最自然的指标集是向上定义的：

$$\Omega^n(M) \xrightarrow{d} \Omega^{n+1}(M).$$

它定义出的同调被称为上同调，从指标的角度来说这只是一般同调重新定义指标后的结果。此外，这样定义出的同调都是  $\mathbb{R}$ -vector space，并且没有某种办法推广成其它的模，这一点和后面的奇异同调理论有所不同。

**Definition 1.1.4 (链映射).** 设  $C_*, D_*$  是两个链复形, 链映射  $f: C_* \rightarrow D_*$  由下述资料组成:

$$f = \{f_q: C_q \rightarrow D_q\}_{q \in \mathbb{Z}} \text{ s.t. } \begin{array}{ccc} C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \\ f_q \downarrow & & \downarrow f_{q-1} \\ D_q & \xrightarrow{\partial'_q} & D_{q-1} \end{array}$$

交换图表可以表达为  $f \circ \partial = \partial \circ f$ , 因为在确定定义域后其意义是明显的.

对  $a \in \ker \partial$ , 我们有  $\partial a = 0$ , 故  $f(\partial a) = \partial(fa) = 0$ , 即  $fa \in \ker \partial$ .

对  $a \in \text{im } \partial$ , 我们有  $a = \partial b$ , 故  $fa = f(\partial b) = \partial(fb)$ , 因此  $fa \in \text{im } \partial$ . 上面两式合起来导致

$$f(\ker \partial) \subset \ker \partial', \quad f(\text{im } \partial) \subset \text{im } \partial'.$$

从而链映射可以诱导出群同态

$$\ker \partial / \text{im } \partial \xrightarrow{f} \ker \partial' / \text{im } \partial'.$$

即  $f$  可诱导出  $f_*: H_*(C_*) \rightarrow H_*(D_*)$ .

我们接下来要在链复形上面定义同伦关系.

**Definition 1.1.5 (链同伦).** 给定两个映射  $f, g: C_* \rightarrow D_*$ , 如果存在  $T: C_* \rightarrow D_{*+1}$  使得

$$f - g = \partial T + T \partial,$$

就称  $T$  是一个  $f, g$  之间的链同伦, 记为  $T: f \simeq g$ , 并且称  $f$  和  $g$  是链同伦等价的.

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial} & C_q & \xrightarrow{\partial} & C_{q-1} & \longrightarrow \\ & f \downarrow g & \swarrow T & f \downarrow g & \swarrow T & f \downarrow g & \\ \longrightarrow & D_{q+1} & \xrightarrow{\partial'} & D_q & \xrightarrow{\partial'} & D_{q-1} & \longrightarrow \end{array}$$

**Proposition 1.1.6.** 如果  $f, g$  是链同伦等价的, 那么  $f_* = g_*$ .

*Proof.* 由于  $f, g$  是 Abel 群之间的映射, 我们可以定义  $f - g$ , 从而只需证明  $(f - g)_* = 0$ . 这是因为对  $[a] \in H_q(C_*)$ ,

$$(f - g)(a) = \partial(a) + T(\partial a) = \partial(Ta),$$

所以  $[(f - g)a] = [\partial(Ta)] = 0$ , 这意味着  $f - g$  把任何同调群中元素都打到 0, 从而  $f - g = 0$ .  $\square$

*Remark.* 1. 我们可以验证链同伦是一个等价关系, 从而可以像拓扑空间一样, 讨论在链同伦等价关系下的一些性质.

2. 对任意一族群同态  $\{T_q: C_q \rightarrow D_{q+1}\}_{q \in \mathbb{Z}}$ , 我们可以通过  $\partial T + T \partial$  来建构出一个链映射, 因为

$$\partial(\partial T + T \partial) = \partial T \partial = (\partial T + T \partial) \partial.$$

这不需要  $T$  有任何给定的条件. 此时  $T$  给出链同伦  $\partial T + T \partial \simeq 0$ .

3. 如果你认为链同伦的定义很怪, 使用链的张量积能够给一个简单直接 (且好用) 的定义: 链  $\mathcal{J}$  满足  $\mathcal{J}_0$  是  $[0], [1]$  两个元素生成的自由 Abel 群,  $\mathcal{J}_1$  是  $[I]$  这一个元素生成的自由 Abel 群, 并且  $\partial[I] = [1] - [0]$ , 其它分量上都是零. 那么一个  $f \simeq g$  的链同伦其实就是链映射

$$h: C_* \otimes \mathcal{J} \rightarrow D_*,$$

使得  $h(\cdot, [0]) = f$ ,  $h(\cdot, [1]) = g$ . 这样的定义明显更有“同伦”的味道.

接下来我们回到拓扑.

**Definition 1.1.7 (标准单形).** 设  $e_0, e_1, \dots, e_k$  是  $\mathbb{R}^{k+1}$  的一组标准基, 定义

$$\Delta_k := \{t_0 e_0 + t_1 e_1 + \dots + t_k e_k : t_i \in \mathbb{R}, t_i \geq 0, \sum_i t_i = 1\}.$$

$\Delta_k$  就被称为标准单形. 我们可以把  $\Delta_k$  看作  $e_0, e_1, \dots, e_k$  这些向量“张成”的图形, 基于此可以把标准单形记为  $[e_0, \dots, e_k]$ . 事实上对任意一组向量  $v_0, v_1, \dots, v_l$  都可以类似定义  $[v_0, v_1, \dots, v_l]$ .

接下来我们定义  $\Delta_k$  的边界. 非常直观地, 我们应该把线段  $\Delta_1$  的边界定义为边界上的两个点,  $\Delta_2$  的边界定义为三角形的三条边, 等等. 它有一个很简单的表达形式, 只要把某个  $e_k$  去掉, 剩下的向量张成的单形就是它的面. 为了方便, 去掉第  $m$  个顶点之后的单形被记为  $[e_0, \dots, \widehat{e}_m, \dots, e_k]$ , 它就是  $[e_0, \dots, e_k]$  的一个面.

## 1.2 奇异同调的基本性质

我们给出定义.

**Definition 1.2.1 (奇异链复形).** 设  $X$  是一个拓扑空间. 取出全体从  $\Delta_k$  到  $X$  的连续映射构成的集合, 将它生成的自由 Abel 群记为  $S_k(X)$ , 即

$$S_k(X) = \mathbb{Z}\{\sigma : \Delta_k \rightarrow X \text{ continuous}\}.$$

约定当  $k < 0$  时,  $S_k(X) = 0$ .

$S_k(X)$  中的元素  $\alpha$  可以表示为  $\alpha = a_1 \sigma_1 + \dots + a_l \sigma_l$ , 其中每个  $a_i \in \mathbb{Z}$ ,  $\sigma_i$  是  $\Delta_i \rightarrow X$  的连续映射. 接下来我们还需定义奇异链复形中的边缘映射: 根据自由性, 只需为每个  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$  定义它的边缘.

**Definition 1.2.2 (奇异链复形定义续).** 对每个  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ , 定义

$$\partial \sigma = \sum_{m=0}^k (-1)^m \cdot \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_m, \dots, e_k]} \in S_{k-1}(X).$$

它们可以张出整个边缘映射  $\partial : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$ . 我们把  $(S_*(X), \partial)$  定义为  $X$  的奇异链复形,  $H_k(S_*(X))$  定义为  $X$  的第  $k$  个奇异同调群 (Singular homology group).

我们验证边缘映射满足  $\partial^2 = 0$ : 同样根据自由性, 只需要验证对每个  $\sigma$  成立即可.

$$\begin{aligned}\partial\partial\sigma &= \sum_{m=0}^k (-1)^m \partial\sigma|_{[\dots, \hat{e}_m, \dots]} \\ &= \sum_{m=0}^k \left( (-1)^m \sum_{j<m} (-1)^j \sigma|_{[\dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_m, \dots]} + (-1)^m \sum_{j>m} (-1)^{j-1} \sigma|_{[\dots, \hat{e}_m, \dots, \hat{e}_j, \dots]} \right) \\ &= \sum_{0 \leq j < m \leq k} (-1)^{j+m} \sigma|_{[\dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_m, \dots]} + \sum_{0 \leq m < j \leq k} (-1)^{j+m-1} \sigma|_{[\dots, \hat{e}_m, \dots, \hat{e}_j, \dots]}.\end{aligned}$$

注意到每个  $\sigma|_{[\dots, \hat{e}_p, \dots, \hat{e}_q, \dots]}$  都会出现两次, 并且两次的符号一定不同, 所以上式得到的结果为 0.

*Remark.* 奇异同调定义的最大的好处的对任何拓扑空间都可以进行, 而且后续可以发展出任意系数的同调.

**Example 1.2.3.** 我们来计算  $S_k(\{\text{pt}\})$ . 这也是少数的直接可以从定义来看出所有奇异群和边缘映射的空间. 根据定义,  $S_k(\{\text{pt}\}) = \mathbb{Z}\{\text{const } \triangle_k \rightarrow \{\text{pt}\}\} \cong \mathbb{Z}$ . 再看边缘映射, 奇数阶时是系数是  $1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) = 0$ , 偶数阶时系数是  $1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) + 1 = 1$ . 所以整个链可以表示为

$$\mathbb{Z}_{(4)} \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_{(3)} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_{(2)} \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_{(1)} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_{(0)} \rightarrow 0_{(-1)}.$$

从而  $H_0(\{\text{pt}\}) \simeq \mathbb{Z}$  并且  $H_n(\{\text{pt}\}) \simeq 0, n > 0$ .

*Remark.* 从同调理论来看, 奇异同调所满足的单点集同调实际上是所谓 “dimension property”, 这和其它公理一起建构出了一个好的 (容易计算的) 同调理论. 如果单点集的同调不可算或者计算结果较差, 非平凡 (如拓扑 K 理论, May 上有简要介绍) 诞生的广义同调理论就未必容易计算. 接下来, 我们将证明奇异同调满足一些性质, 然后用这些性质去写出一些空间的同调群.

**Example 1.2.4.** 我们对任意拓扑空间  $X$  研究  $H_0(X)$ .

$$S_1(X) \xrightarrow{\partial} S_0(X) \longrightarrow 0$$

$$[\sigma : [0, 1] \rightarrow X] \longmapsto \sigma(1) - \sigma(0)$$

我们注意到对任意处于同一道路连通分支的两点  $a, b$ , 都能找到一条道路  $\sigma$  使得  $a = \sigma(1), b = \sigma(0)$ , 从而在  $H_0(X)$  中有  $[a] = [b]$ .

$$H_0(X) = \{\text{points in } X\} / \{a - b : a, b \text{ in same path component}\}.$$

所以  $H_0(X)$  可以看作  $X$  的全体道路连通分支生成的自由 Abel 群.

**Example 1.2.5.** 我们再来看看如何理解  $H_1(X)$ .  $S_1(X)$  中的一条链是可重有限和  $\sigma_1 + \dots + \sigma_l$ , 其中每个  $\sigma_i$  都是某个  $[0, 1] \rightarrow X$ . 先来看闭链的性质:

$$\begin{aligned}\partial(\sigma_1 + \dots + \sigma_l) &= (\sigma_1(1) - \sigma_1(0)) + \dots + (\sigma_l(1) - \sigma_l(0)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

把每个  $\sigma_i$  看成一条从  $\sigma(0)$  走到  $\sigma(1)$  的有向道路, 这意味着上面的求和中所有的起点和终点在某种意义下可以互相抵消: 如果一个点在  $k$  个道路中被作为终点, 那也恰好在  $k$  个道路中被作为起点. 这样, 这些道路就可以首尾相连成为一个圈. (图可被一笔画) 所以直观来说, 1 维闭链就是  $X$  中的圈. (不仅是直观, 我们经常需要把它想象成一个圈, 然后通过技术性的手段写称奇异单形的形式.) 注意, 如果我们有

- $\sigma_1, \sigma_2 : [0, 1] \rightarrow X, \sigma_1(0) = \sigma_2(1), \sigma_1(1) = \sigma_2(0)$  是首尾相连的道路,
- $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ , 它就是两条道路首尾相连形成的圈;

这并不代表  $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$ , 因为在自由建构下, 就算两个道路在图上看起来是一样的, 只要它们对应的参数化不同, 它们就不是同一个奇异单形.

再考虑恰当链所具有的性质. 考虑一个 2-单形  $[e_0, e_1, e_2]$ , 我们混淆这个单形和它在  $X$  中的像. 它的边界可以表示为  $[e_1, e_2] - [e_0, e_2] + [e_0, e_1]$ , 使用我们刚刚有向道路的记号, 我们可以得到一个圈  $e_0 \rightarrow e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_0$ , 这正是  $\text{im } \partial \subset \ker \partial$  的直观表现. 所以一个 1 维恰当链实际上就是  $X$  中 (可能不止一个) 圆盘的边界, 或者说, 一个 2 维带边流形的边界.

当然我们在讨论基本群时就已经见过类似的事情了, 我们可以想象 1 维闭链是那些圈, 1 维恰当链是那些零伦圈, 就建构起了对应. 经过一些技术性的证明, 确实可以得到

$$H_1(X) = \pi_1(X, *)^{\text{ab}}.$$

(它的标准证明在命题 1.3.6.)

我们还可以继续下去. 如果我们再去看  $H_2$  中的闭链, 会发现它其实说的是  $X$  中一些能够和谐地粘合起来 (就对应着边界等同) 的三角形. 这自然让我们联想到流形的三角剖分, 即我们可以看作这是一个 2 维流形在  $X$  中的像. 而恰当链实际上说的差不多就是这个 2 维流形能被看作一个 3 维流形的边界. 但是奇异同调里它们都不是完全对等的, 就像把它们强制剖分成了小块一样, 但是我们考虑  $\sigma : S^1 \rightarrow X$  显然比把  $S^1$  剖分成三部分, 再把它们对应到三个链的和要自然很多. 为什么我们不这么去定义呢?

**Example 1.2.6 (配边理论 bordism theory).** 上一个例子中的想法实际上是所谓配边理论. 关于配边理论, May 的最后一章有一个 (我看不懂的) 介绍, 此外我还找到了一篇入门向的文章 [Bordism Homology](#). 文章中讲述了非定向的配边理论如何构建出一个同调理论 (似乎严格来说不是全部<sup>1</sup>, 文章中着重写了 MV-sequence 的证明). Bordism 的思想其实就是我们上个例子所说的, 考虑奇异链不如直接考虑流形及其边界到  $X$  的映射自然. 简单起见, 下面的理论建构都在光滑范畴下. 我们定义奇异  $k$ -流形构成的集合如下:

$$S_{\text{Mani}}(X) := \{f : M^k \rightarrow X \text{ continuous(smooth)} \mid M^k \text{ 是 } k \text{ 维光滑紧流形}\}$$

这里我们用紧流形代表可能带边的紧流形，闭流形带边不带边的紧流形. 那么任何  $(M^k, f)$  都自然诱导出一个  $k-1$  维奇异流形  $(\partial M, f|_{\partial M})$ , 注意我们规定空集可以成为任何维数的流形, 用  $\emptyset^k$  来区分. 我们定义如果闭流形  $(N, g)$  满足存在紧流形  $(M, f)$  使得

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\sim} & \partial M \\ g \downarrow & \swarrow f|_{\partial M} & \\ X & & \end{array}$$

那么称  $(N, g)$  是零配 (null-bordant) 的. 这正是在上一个例子中那些应当被视为 0 的东西: 能延拓为  $k+1$  维流形边界到  $X$  的映射的那些奇异流形. 但是严格来说这还不是一个“商”, 因为奇异流形上根本没有加法结构! 为了附加上加法结构, 我们需要广泛的引入配边的概念:

称奇异流形  $(M_1, f_1)$  和  $(M_2, f_2)$  是配边的, 如果存在紧流形  $(M, f)$  使得

$$\begin{array}{ccc} M_1 \amalg M_2 & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & \partial M \\ f_1 \amalg f_2 \downarrow & \swarrow f|_{\partial M} & \\ X & & \end{array}$$

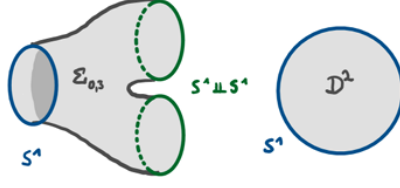
我们说  $(M, f, \varphi)$  是  $(M_1, f_1)$  和  $(M_2, f_2)$  之间的一个配边. 特别地, 我们直接称两个闭流形  $M_1, M_2$  是配边的, 如果  $(M_1, M_1 \rightarrow \{\text{pt}\})$  和  $(M_2, M_2 \rightarrow \{\text{pt}\})$  是配边的, 这相当于直接问“是否存在一个流形  $M$  使得  $\partial M = M_1 \amalg M_2$ ”. 对应地, 我们也把无交并定义为奇异流形上的加法结构:

$$(M_1, f_1) + (M_2, f_2) = (M_1 \amalg M_2, f_1 \amalg f_2).$$

可以证明“配边”是一个等价关系, 无交并也确实是一个加法. 我们可以定义配边同调群  $\mathfrak{N}_k(X)$  就是  $k$  维奇异闭流形商掉配边等价关系后所得的 Abel 群. (注意! 这不是一个由链复形生成的同调理论!)

配边从某种意义上是同伦的推广版本. 因为如果有两个映射  $(M, f)$  和  $(M, g)$  是同伦的, 就代表存在一个高一维的圆柱  $(M \times I, h)$ , 其边界是  $M \amalg M$ , 并且边界映射就是  $f \amalg g$ . 特别地,  $(M, f)$  总是和自己配边, 在群结构下就算说  $\text{char } \mathfrak{N}_k(X) = 2$ , 所以配边同调群也被看作是一个  $\mathbb{F}_2$ -线性空间, 并且可以看成奇异闭流形和零配闭流形之商.

这个定义在奇怪中透露着一丝合理. 在同胚意义下仅有的连通 1 维闭流形是  $S^1$ , 它们给出的映射就是  $X$  中的圈. 无交并运算告诉我们所有 1 维奇异流形是  $X$  中一些圈的和, 而只要两个圈同伦它们就是等价的. 从这一点来看, 我们又得到了“seeming like 基本群”的一个东西. 不过我们还没有说明等价关系只有这些, 比如说考虑下面的“pants”:



它给出了一个圈和两个圈之间的配边等价，我们看到此时情况已经很复杂。

还有一个可以观测的维数是 0 维. 0 维流形就是点，一个连通的 1 维紧流形要么同胚于  $S^1$  要么同胚于  $[0, 1]$ ，所以 1 维流形的边界总是偶数个点. 所以对任何两个  $\phi, \psi : \{\text{pt}\} \rightarrow X$ ，只要这两个点的像落在同一个道路连通分支中它们就是配边的，在配边同调群中表示同一个元素. 所以我们确实可以证明 0 维配边同调群就是连通分支生成的自由  $\mathbb{F}_2$ -模.

但是……配边群远没有那么简单. 我们之前说奇异同调好就好在可以计算单点的同调群，那对配边同调呢？我们定义  $\mathfrak{N}_k := \mathfrak{N}_k(\{\text{pt}\})$  来凸显其地位. 奇异同调中除了 0 维外高阶的同调都平凡. 但是对配边同调，虽然在 0 维，1 维时没有出问题，但是高维时当然存在“不能被写成另一个流形的边界”的流形，这是因为如果一个流形能被写成另一个流形的边界，那么根据 Poincare 对偶有  $\chi(M)$  是偶数，但是我们可以直接计算得到所有  $\chi(\mathbb{R}P^{2n})$  都是奇数，从而  $\mathfrak{N}_k$  在高维时**非平凡**！

虽然配边同调不满足 dimension property，但是可以验证它满足其它的同调理论，比如 MV-序列仍然成立，建构 MV-序列需要用到光滑流形中的一些理论来辅助构造. 实际上 Thom 已经证明了

$$\mathfrak{N}_* \cong \mathbb{F}_2[u_2, u_4, u_5, \dots, u_i, \dots], \quad i \neq 2^j - 1.$$

以及

$$\mathfrak{N}_*(X) \cong \mathfrak{N}_* \otimes H_*(X, \mathbb{F}_2).$$

可以想象这是极其非平凡的东西，这也意味着，虽然配边理论的定义更符合我们的直观，但是牵扯上流形的研究让事情变得非常难以处理. 所以虽然奇异同调看上去更加“奇异”，它是一个更容易进行初学的理论.

接下来我们考虑拓扑空间上的连续映射诱导出的链映射. 它的定义很自然：对  $f : X \rightarrow Y$ ，可以定义

$$f_{\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y), \quad [\sigma : \Delta_k \rightarrow X] \mapsto [f \circ \sigma : \Delta_k \rightarrow X \rightarrow Y].$$

它是一个链映射，进而也诱导出同调群之间的态射  $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ . 容易直接通过定义来验证  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_*(X)}$  和  $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ （其实把  $*$  下标换成  $\sharp$  下标也对），从而我们给出了  $\text{Top} \rightarrow \text{Ch}(\text{Ab})$  的一个函子，同时每个  $H_k(\cdot)$  也是  $\text{Top} \rightarrow \text{Ab}$  的一个函子.

**Example 1.2.7 (双角锥 Suspension).** 课上花了不少时间讲了一些范畴和函子的例子, 我们就举两例比较有趣的. 对一个拓扑空间  $X$ , 定义其双角锥 (unreduced suspension)  $SX$  为

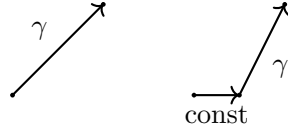
$$SX := X \times [-1, 1] / (X \times \{-1\}, X \times \{1\}).$$

则我们可以把  $S : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$  实现为一个函子. 这是因为  $S$  运算也可以对映射  $f$  进行, 只需要把  $(x, t)$  送到  $(f(x), t)$  即可.

**Example 1.2.8 (基本群胚 Fundamental Groupoid).** 为每个拓扑空间  $X$  我们想考虑  $X$  中的道路, 于是可以定义

$$PX : \begin{cases} \text{Obj: } X \text{ 中的点集;} \\ \text{Mor: } \text{Hom}(x, y) = \{\sigma : [0, 1] \rightarrow X, \sigma(0) = x, \sigma(1) = y\}. \end{cases}$$

但我们立刻会注意到这不是一个范畴, 因为我们想要让常值道路  $\text{const } x$  作为单位态射, 然而把常值道路和任意道路拼接起来不是它本身.



解决方法是考虑同伦等价类, 定义

$$\Pi X : \begin{cases} \text{Obj: } X \text{ 中的点集;} \\ \text{Mor: } \text{Hom}(x, y) = \text{从 } x \text{ 走到 } y \text{ 的道路的同伦等价类.} \end{cases}$$

那么  $\Pi X$  就是一个范畴, 并且对任意  $[\gamma] \in \text{Hom}(x, y)$  都能找到其逆元  $[\gamma^{-1}] \in \text{Hom}(y, x)$ , 这样的范畴被称为群胚. 特别地, 基本群

$$\pi_1(X, x) = \text{Hom}_{\Pi X}(x, x).$$

**Theorem 1.2.9 (同伦不变性).** 设  $X, Y$  是拓扑空间, 如果  $f, g : X \rightarrow Y$  满足  $f \simeq g$ , 那么  $f_{\#} \simeq g_{\#}$ , 即  $f_{\#}$  和  $g_{\#}$  链同伦.

这也意味着,  $(\cdot)_{\#}$  是  $\mathbf{hTop} \rightarrow \mathbf{hCh}_*(\mathbf{Ab})$  是函子.

*Remark.* 对任何定义了同伦关系的范畴  $\mathcal{C}$ , 可以定义

$$\mathbf{hC} = \begin{cases} \text{Obj: } \mathcal{C} \text{ 中的对象;} \\ \text{Mor: } \mathcal{C} \text{ 中态射的同伦等价类.} \end{cases}$$

那么在  $\mathbf{hC}$  中同构的对象就是  $\mathcal{C}$  中同伦等价的对象, 同伦不变性就可以解释成同伦范畴之间的函子.

**Corollary 1.2.10.** 如果  $f, g : X \rightarrow Y$  满足  $f \simeq g$ , 那么  $f_* = g_*$ . 如果  $X, Y$  是同伦等价的拓扑空间, 那么  $H_*(X) \cong H_*(Y)$ .

## Week 2: 2025/9/19

我们为同伦不变性给一个证明. 先来看一些想法: 如果从配边同调的角度来看, 这个命题比较显然: 给定  $F: X \times I \rightarrow Y$  满足  $F|_{X \times \{0\}} = f$  以及  $F|_{X \times \{1\}} = g$ . 那么如果有奇异流形  $\sigma: M \rightarrow X$ , 我们需要证明  $f \circ \sigma$  和  $g \circ \sigma$  是配边的. 注意到

$$M \times I \xrightarrow{\sigma \times \text{id}} X \times I \xrightarrow{F} Y$$

在 0 和 1 处的限制就是  $f \circ \sigma$  和  $g \circ \sigma$ , 那么  $(M \times I, F \circ (\sigma \times \text{id}), \iota_0 \amalg \iota_1)$  就是  $(M, f \circ \sigma)$  和  $(M, g \circ \sigma)$  之间的一个配边 ( $M$  是闭流形,  $\partial(M \times I) = M \times \partial I$ ), 这就完成了同伦不变性的证明. 但是在奇异同调中  $\Delta_k \times I$  不再是一个单形, 所以没有那么好处理, 不过这仍然给我们提供了一个处理的思路.

*Proof.* 记

$$\iota_0: X \rightarrow X \times I, x \mapsto (x, 0), \quad \iota_1: X \rightarrow X \times I, x \mapsto (x, 1).$$

那么  $F \circ \iota_0 = f$  并且  $F \circ \iota_1 = g$ . 要证明  $f_{\#} \simeq g_{\#}$ , 只需证明  $\iota_{0\#} \simeq \iota_{1\#}$ . 一方面  $\iota_0$  和  $\iota_1$  之间确实有同伦关系, 另一方面这样两边左复合  $F_{\#}$  就会得到一般的同伦.

接下来具体地构造链同伦  $P: S_k(X) \rightarrow S_{k+1}(X \times I)$ : 首先对一个  $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$ , 它可以自然地给出  $X \times I$  中的一个“奇异柱体”  $\sigma \times \text{id}_I$ . 接下来的步骤是把它切成一些单形的和: 记  $\Delta_k \times X$  的下底面是  $[v_0, \dots, v_k]$ , 上底面是  $[w_0, \dots, w_k]$ , 并且  $v_i$  的上方是  $w_i$ . 比如说当  $k=2$  时, 柱体可以被划分为 3-单形

$$[v_0, v_1, v_2, w_2], [v_0, v_1, w_1, w_2], [v_0, w_0, w_1, w_2]$$

的并, 但是为了让内部的面“消去”, 需要交错地求和使得求边界之后只剩下柱体的边界 ( $\partial P$  是柱体的全表面,  $P\partial$  是柱体的侧面, 二者相减就是上下底面  $\iota_0\sigma$  和  $\iota_1\sigma$  之差) 基于如上的考虑, 我们选择  $P$ :

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (\sigma \times \text{id}_I)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k]}.$$

展开验证结论成立即可. 为了方便, 我们省略限制映射  $(\sigma \times \text{id}_I)|_{[\cdot]}$  的表述, 直接用

$[\cdot]$  来表示. (但还是保留  $\sigma|..$ )

$$\begin{aligned}
\partial P(\sigma) &= \partial \sum_{i=0}^k (-1)^i [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k] \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k] \\
&\quad + \sum_{i=0}^k (-1)^i \sum_{j=i}^k (-1)^{j+1} [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_k] \\
&= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k] \\
&\quad + \sum_{j > i} (-1)^{i+j+1} [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_k] \\
&\quad + \sum_i ([v_0, \dots, \widehat{v}_i, w_i, \dots, w_k] - [v_0, \dots, v_i, \widehat{w}_i, \dots, w_k]). \\
P(\partial\sigma) &= P \left( \sum_{m=0}^k (-1)^m \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_m, \dots, e_k]} \right) \\
&= \sum_{m=0}^k (-1)^m P(\sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e}_m, \dots, e_k]}) \\
&= \sum_{m=0}^k (-1)^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l [v_0, \dots, v_l, w_l, \dots, \widehat{w}_m, \dots, e_k] \\
&\quad + \sum_{m=0}^k (-1)^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{l-1} [v_0, \dots, \widehat{v}_m, \dots, v_l, w_l, \dots, e_k].
\end{aligned}$$

红色部分和蓝色部分都互为相反数, 所以

$$\begin{aligned}
(\partial P + P\partial)\sigma &= \sum_i ([v_0, \dots, \widehat{v}_i, w_i, \dots, w_k] - [v_0, \dots, v_i, \widehat{w}_i, \dots, w_k]) \\
&= [w_0, \dots, w_k] - [v_0, \dots, v_k] = \iota_{1\#}(\sigma) - \iota_{0\#}(\sigma).
\end{aligned}$$

这就完成了证明.  $\square$

接下来为了应用, 我们还得陈述一些同调代数的结果: 如果 Abel 群  $A, B, C$  满足下述短链是一个同调群平凡的链复形:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0.$$

那么称其为一个**短正合列** (Short Exact Sequence). 更长的同调群平凡的链被称为**长正合列**. 我们还可以对链复形来定义短正合列: 给定三个链复形  $C_*, D_*, E_*$  和两个链映射  $f, g$ , 那么

$$0 \rightarrow C_* \xrightarrow{f} D_* \xrightarrow{g} E_* \rightarrow 0.$$

被称为一个短正合列如果链复形中对每个  $k$  都诱导出一个 Abel 群的短正合列:

$$0 \rightarrow C_k \xrightarrow{f_k} D_k \xrightarrow{g_k} E_k \rightarrow 0.$$

**Theorem 1.2.11 (Snake Lemma).** 一个链复形之间的短正合列

$$0 \rightarrow C_* \xrightarrow{f} D_* \xrightarrow{g} E_* \rightarrow 0$$

可诱导出同调群之间的长正合列

$$\rightarrow H_k(C_*) \xrightarrow{f_*} H_k(D_*) \xrightarrow{g_*} H_k(E_*) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(C_*) \xrightarrow{f_*} H_{k-1}(D_*) \xrightarrow{g_*} H_{k-1}(E_*) \rightarrow$$

*Proof.*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{k+1} & \longrightarrow & D_{k+1} & \longrightarrow & E_{k+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_k & \xrightarrow{f} & D_k & \xrightarrow{g} & E_k & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{k-1} & \longrightarrow & D_{k-1} & \longrightarrow & E_{k-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

证明就是 diagram chasing:

$$\begin{array}{ccccccc} & & c & \longrightarrow & b & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ d & \xrightarrow{f_*} & \partial c & \xrightarrow{g_*} & g(a) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

先证明  $H_k(D_*)$  处的正合性，这是因为对任意  $[a] \in H_k(D_*)$  满足  $g_*[a] = 0 \in H_k(E_*)$ ，都存在  $b \in E_{k+1}$  使得  $ga = \partial b$ 。根据  $D_{k+1} \rightarrow E_{k+1}$  的满性知存在  $c \in D_{k+1}$  使得  $gc = b$ ，从而  $g\partial(c) = g(a)$ ，故  $g(\partial c - a) = 0$ 。根据中间  $C_k \rightarrow D_k \rightarrow E_k$  的正合性，存在  $d \in C_k$  使得  $f(d) = \partial c - a$ ，于是  $f\partial(d) = \partial(\partial c - a) = 0$ 。最后根据  $C_{k-1} \rightarrow D_{k-1}$  的单性得到  $\partial d = 0$ ，也就是说  $f_*[-d] = [a - \partial c] = [a]$ 。证毕。

$$\begin{array}{ccccccc} d & & b & \xrightarrow{g_*} & a & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ c & \xrightarrow{f_*} & \partial(b) & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

然后定义  $\delta$ ，我们需要定义一个  $H_k(E_*) \rightarrow H_{k-1}(C_*)$ 。对  $[a] \in H_k(E_*)$ ，通过  $D_k \rightarrow E_k$  的满性可找到  $b \in D_k$  使得  $g_*(b) = a$ 。考虑  $b$  的边界  $\partial b$ ，根据右下图表交换可知  $g_*(\partial b) = 0$ ，从而根据  $C_{k-1} \rightarrow D_{k-1} \rightarrow E_{k-1}$  的正合性可知存在  $c \in C_{k-1}$  使得  $f_*(c) = \partial b$ ，我们就定义  $\delta[a] = [c]$ 。

- 验证良定义性：如果还有另一个  $b' \in D_k$  满足  $g_*(b') = a$ ，那么  $g_*(b - b') = 0$ ，使用存在  $d \in C_k$  使得  $f_*(d) = b - b'$ 。根据

$$\partial b - \partial b' = (\partial f_*)(d) = (f_*\partial)(d) = 0,$$

以及  $C_{k-1} \rightarrow D_{k-1}$  的单性可知  $\partial(d) = c - c'$ ，所以  $[c] = [c']$ 。

- 验证  $H_k(E_*)$  处的正合性：如果  $\delta([a]) = 0$ ，那么存在  $d \in C_k$  使得  $\partial(d) = c$ ，所以  $\partial f_*(d) = f_*(c) = \partial(b) \Rightarrow [b - f_*(d)] \in H_k(D_*)$  并且  $g_*[b - f_*(d)] = g_*[b] = [a]$ ，即  $[a] \in \text{im } g_*$ 。

- 验证  $H_{k-1}(C_*)$  处的正合性: 如果存在  $b \in D_k$  使得  $\partial b = f_*(c)$ , 那么取  $a = g_*(b)$  就可知  $\delta([a]) = [c]$ .

这就完成了证明.



### Week 3: 2025/9/24 2025/9/26

还有如下几个同调代数的结论:

**Proposition 1.2.12** (长正合列的自然性). 我们已经考虑了“链复形短正合列”所映到的“长正合列”, 那么自然我们可以考虑两个短正合列之间的链映射所映到的像.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_* & \longrightarrow & D_* & \longrightarrow & E_* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_* & \longrightarrow & D'_* & \longrightarrow & E'_* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由于链映射能诱导出同调群之间的链映射, 所以能得到下述长正合列之间的映射

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & H_k(C_*) & \longrightarrow & H_k(D_*) & \longrightarrow & H_k(E_*) & \xrightarrow{\delta} & H_{k-1}(C_*) & \longrightarrow \\ & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\ \longrightarrow & H_k(C'_*) & \longrightarrow & H_k(D'_*) & \longrightarrow & H_k(E'_*) & \longrightarrow & H_{k-1}(C'_*) & \longrightarrow \end{array}$$

我们声称该映射的确是长正合列之间的链映射.

**Proposition 1.2.13** (五引理 Five Lemma). 考虑如下 Abel 群之间的交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & X_3 & \longrightarrow & X_4 & \longrightarrow & X_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ Y_1 & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & Y_3 & \longrightarrow & Y_4 & \longrightarrow & Y_5 \end{array}$$

横行都是正合列. 那么

- 若  $f_1$  满而  $f_2, f_4$  单, 则  $f_3$  为单同态.
- 若  $f_5$  单而  $f_2, f_4$  满, 则  $f_3$  为满同态.
- 若  $f_1$  满,  $f_5$  单而  $f_2, f_4$  为同构, 则  $f_3$  为同构.

五引理经常配合之前的长正合列应用, 若长正合列中  $H_*(C_*), H_*(D_*), H_*(E_*)$  里有两组能给出同构, 那么第三组也给出同构.

在开始计算同调群之前, 最后再介绍一下约化同调群, 它有时会更便于进行计算.

**Definition 1.2.14** (约化奇异同调 reduced singular homology). 回忆奇异链复形定义为

$$\rightarrow S_2(X) \rightarrow S_1(X) \rightarrow S_0(X) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

我们知道最后一个非平凡映射  $S_1(X) \rightarrow S_0(X)$  可表示为  $[\sigma \mapsto \sigma(1) - \sigma(0)]$ , 于是可以定义下面的增广链复形:

$$\rightarrow S_2(X) \rightarrow S_1(X) \rightarrow S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

把所有点  $p \in S_0(X)$  打到  $1 \in \mathbb{Z}$ . 再考虑上述链复形的同调群, 第  $k$  个位置上的同调群定义为  $\tilde{H}_k(X)$ .

**Proposition 1.2.15.** 可以证明

$$H_k(X) = \begin{cases} \tilde{H}_k(X), & k \geq 1, \\ \tilde{H}_k(X) \oplus \mathbb{Z}, & k = 0. \end{cases}$$

注意直和不是典范的.

*Proof.* 我们之前已经证明

$$H_0(X) = \mathbb{Z}\{X \text{ 的道路连通分支}\};$$

而现在

$$\tilde{H}_0(X) = \ker(\bar{\varepsilon}: \mathbb{Z}\{X \text{ 的道路连通分支}\} \rightarrow \mathbb{Z}).$$

所以有短正合列

$$0 \rightarrow \tilde{H}_0(X) \rightarrow H_0(X) \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

通过选定  $H_0(X)$  的一个连通分支可以得到一个  $f: \mathbb{Z} \rightarrow H_0(X)$  使得  $\bar{\varepsilon} \circ f = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ , 从而上述正合列分裂. 

*Remark.* 实际上, 约化奇异同调可以典范地对带基点拓扑空间  $\text{Top}_*$  定义.

### 1.3 切除定理和 MV-列

在 de Rham 上同调中, 单位分解使得我们可以把一个微分形式拆分为一些小的开集中的微分形式之和, 这导致我们能很容易地证明有 MV-sequence. (配边同调中也类似, 运用拓扑之外的知识来给出建构)

**Proposition 1.3.1 (de Rham MV-列).** 设流形  $M$  上的开集  $U, V$  满足  $M = U \cup V$ . 则包含映射  $U \cap V \rightrightarrows U \amalg V \rightarrow M$  诱导出的

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \rightarrow \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0 \\ (\omega, \tau) \mapsto \omega|_{U \cap V} - \tau|_{U \cap V}. \end{aligned}$$

*Proof.*  $\Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$  是单射显然, 因为  $U \cup V = M$ , 所以  $(\omega|_U, \omega|_V)$  上已经记录了每个点  $p \in M$  处微分形式的信息.

$\Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$  处的正合性显然, 因为如果  $(\omega, \tau)$  两个微分形式在  $U \cap V$  上是等同的, 它们当然能拼成  $M$  上的微分形式.

最后只需证明  $\Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \rightarrow \Omega^*(U \cap V)$  是满射. 对每个  $\omega \in \Omega^*(U \cap V)$  我们选取单位分解  $(\rho_U, \rho_V)$  并说明  $\rho_U(\omega) \in \Omega^*(V)$ ,  $\rho_V(\omega) \in \Omega^*(U)$ . 这是因为  $\rho_U \omega$  在  $\partial U \cap V$  附近一定 vanish 而在  $\partial V \cap U$  上未必 vanish. 于是  $\omega$  是  $(\rho_V \omega, -\rho_U \omega)$  的像, 证毕. 

GTM82 的第 8 章中还有如下关于推广 MV-列的命题:

**Proposition 1.3.2 (推广 MV-列).** 给定流形  $M$  的一个开覆盖  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ , 定义  $U_{\alpha_0 \dots \alpha_k} = \bigcap_{i=0}^k U_{\alpha_i}$ , 那么在  $M$  上所有形如

$$\partial_i : U_{\alpha_0 \dots \alpha_k} \hookrightarrow U_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_k}$$

的嵌入组合起来可以构成形如下述的图表:

$$M \xleftarrow{\partial} \prod_{\alpha_0} U_{\alpha_0} \xleftarrow[\partial_1]{\partial_0} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} U_{\alpha_0 \alpha_1} \xleftarrow[\partial_2]{\partial_1} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2} U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \xleftarrow{\dots} \dots$$

这可以诱导出微分形式层面上的序列:

$$\Omega^*(M) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0} \Omega^*(U_{\alpha_0}) \xrightarrow[\partial_1]{\partial_0} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} \Omega^*(U_{\alpha_0 \alpha_1}) \xrightarrow[\partial_2]{\partial_1} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2} \Omega^*(U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}) \dots$$

把第  $k$  个 product 中的元素  $\omega$  的  $\alpha_0 \dots \alpha_k$  这项分量记为  $\omega_{\alpha_0 \dots \alpha_k}$ , 那么

$$\delta_i : \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k}) \rightarrow \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}})$$

就满足  $(\delta_i \omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{i+1}} = \omega_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{k+1}}$ . 我们定义

$$\delta : \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_k}) \rightarrow \prod \Omega^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_{k+1}}), \quad \delta = \sum_{i=0}^k (-1)^i \delta_i.$$

那么就有如下的正合列:

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0} \Omega^*(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\delta} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} \Omega^*(U_{\alpha_0 \alpha_1}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

特别地, 当  $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$  时, 就得到标准的 MV-序列.

其证明也可利用单位分解在短短几行内写完. 然而在奇异同调中问题没有那么简单, 我们需要考虑一个类似单位分解的结果.

**Definition 1.3.3.** 给定拓扑空间  $X$  和它的一个开覆盖  $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ , 定义  $X$  中的  $\mathcal{U}$ -奇异小链  $S_*^{\mathcal{U}}(X)$  为

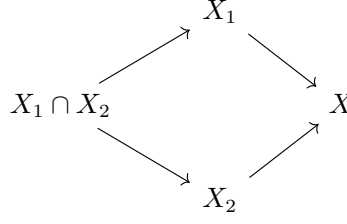
$$S_k^{\mathcal{U}}(X) = \left\{ \sum_i n_i \sigma_i \mid \begin{array}{l} n_i \in \mathbb{Z}, \sigma : \Delta_k \rightarrow X, \\ \forall \sigma_i, \exists U_j \text{ s.t. } \text{im } \sigma_i \subset U_j \end{array} \right\}.$$

容易验证可以定义类似的边缘映射使它成为一个链复形.

**Theorem 1.3.4 (切除定理 Excision Theorem).** 自然的包含映射  $\iota : S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_*(X)$  是链同伦等价. 特别地,  $H_*^{\mathcal{U}}(X) \cong H_*(X)$ .

这个定理的证明会比较复杂, 我们先来看几个它的应用: 它可以用来证明 MV-列相关的结果: 我们的想法是利用  $X$  的开覆盖  $\mathcal{U}$  中每个  $U_i$  的同调群来计算  $X$  的

同调群. 比如当  $X = X_1 \cup X_2$  时, 定义  $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$  以及  $S_*(X_1 + X_2) = S_*^{\mathcal{U}}(X)$ , 我们考虑



它可以诱导出链映射

$$0 \rightarrow S_*(X_1 \cap X_2) \rightarrow S_*(X_1) \oplus S_*(X_2) \rightarrow S_*(X).$$

为了保证正合性, 我们把后一个映射定义为  $[(a, b) \mapsto a - b]$ . 由于自然地有

$$\text{im}[S_*(X_1) \oplus S_*(X_2) \rightarrow S_*(X)] = S_*(X_1 + X_2)$$

所以实际上有短正合列

$$0 \rightarrow S_*(X_1 \cap X_2) \rightarrow S_*(X_1) \oplus S_*(X_2) \rightarrow S_*(X_1 + X_2) \rightarrow 0.$$

这可以诱导出同调群的长正合列

$$\rightarrow H_k(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_k(X_1) \oplus H_k(X_2) \rightarrow H_k(X_1 + X_2) \rightarrow H_{k-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots$$

根据上面的定理,  $H_*(X) \cong H_*(X_1 + X_2)$ , 所以上面的 MV 列可以被替换成

$$\rightarrow H_k(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_k(X_1) \oplus H_k(X_2) \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_{k-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots$$

我们完全可以对约化同调群建构出同样的 MV-序列.

**Example 1.3.5** ( $S^n$  的同调群). 我们把  $S^n$  放在  $\mathbb{R}^{n+1}$  中, 定义

$$D_+ = S^n \cap \{x_n \geq -0.1\}, \quad D_- = S^n \cap \{x_n \leq 0.1\}.$$

我们有  $S^n = D_+ \cup D_-$ ,  $D_+ \cap D_- = N(S^{n-1}) \simeq S^{n-1}$ . 所以 MV-列告诉我们

$$\tilde{H}_k(D_+^n) \oplus \tilde{H}_k(D_-^n) \rightarrow \tilde{H}_k(S^n) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(D_+^{n-1}) \oplus \tilde{H}_{k-1}(D_-^{n-1})$$

根据正合性以及两端都是 0 可知  $\tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$ , 归纳容易证明

$$\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \mathbb{Z}, & k = n. \end{cases}$$

*Remark.* 奇异同调群是一个好的工具, 因为既有 MV 序列, 单点群又很好计算. 相比之下, 配边同调缺少了后者, 同伦群缺少了前者 (有长正合列, 但是适用性没有那么强, 包括也有切除定理, 但是需要  $n$ -连通的条件), 所以非常难以计算.

接下来我们考虑基本群和 1 阶同调群之间的关系.

**Proposition 1.3.6.** 对道路连通空间  $X$ ,

$$H_1(X) \cong \pi_1(X, *)^{\text{ab}}.$$

这个命题虽然看上去比较显然, 但是如果盲目地去看的话很难把证明写清楚, 因为两个群都是经过不少代数操作才建构出来的. 我们的过程分下面几步:

- 定义群同态  $\phi : \pi_1(X, *)^{\text{ab}} \rightarrow H_1(X)$ . 我们首先可定义显然的从回路空间  $\Omega(X, *)$  到  $H_1(X)$  的映射, 然后先证明同伦的回路映到的像相同 (从而可定义出映射  $\pi_1(X, *) \rightarrow H_1(X)$ ), 并且这是一个群同态. 最后根据  $H_1(X)$  是 Abel 群自动给出唯一的  $\phi$ .
- 定义群同态  $\psi : H_1(X) \rightarrow \pi_1(X, *)^{\text{ab}}$ . 事实上我们对所有奇异单形  $\sigma : \Delta_1 \rightarrow X$  定义它在  $\pi_1(X, *)^{\text{ab}}$  中的像, 根据自由性这给出群同态  $S_1(X) \rightarrow \pi_1(X, *)^{\text{ab}}$ . 我们证明所有恰当链  $B_1(X)$  都被映到 0, 这就诱导出了群同态  $H_1(X) \hookrightarrow S_1(X)/B_1(X) \rightarrow \pi_1(X, *)^{\text{ab}}$ .
- 最后证明二者复合为  $\text{id}$ , 这就证明了二者群同构.

*Proof.* 显然道路  $[0, 1] \rightarrow X$  和奇异单形  $\Delta_1 \rightarrow X$  之间可建立一一对应, 我们将二者混淆, 把一维单形也采用  $I \rightarrow X$  的记号. 定义  $\Phi : \Omega(X, *) \rightarrow H_1(X)$ ,  $\gamma \mapsto [\gamma]$ . 这是因为回路  $\gamma$  满足  $\partial\gamma = 0$ , 所以  $[\gamma]$  落在同调群中.

首先证明同伦的圈在  $\Phi$  下给出相同的像. 这是因为如果有  $h : \gamma_1 \simeq \gamma_2$ , 那么给出  $h : I \times I \rightarrow X$ , 将正方形的顶点顺时针标为  $A, B, C, D$ ,  $h|_{AB} = \gamma_1$ ,  $h|_{DC} = \gamma_2$ ,  $h|_{BC} = h|_{DA} = \text{const } *$ . 我们把边  $DA$  收缩为一点就得到一个三角形  $\triangle ABC$ , 现在把  $h|_{\triangle ABC}$  作为一个二维奇异单形, 那么  $[\partial h|_{\triangle ABC}] = [\gamma_1] - [\gamma_2] + [\text{const } *] = 0$ . 显然考虑平凡的  $\Delta_2 \rightarrow *$  就得到  $[\text{const } *] = 0$ , 所以  $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ , 因此  $\Phi$  诱导出基本群到  $H_1(X)$  的映射

$$\tilde{\Phi} : \pi_1(X, *) \rightarrow H_1(X).$$

还需证明这是一个群同态. 这是容易的: 考虑  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(X)$ , 我们可以定义一个  $h' : \Delta_2 \rightarrow X$ ,  $(t_0, t_1, t_2) \mapsto (\gamma_1 * \gamma_2)(t_0 + t_1/2, t_1/2 + t_2)$ , 那么  $\Delta_2$  的两条邻边分别被打到  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$ , 第三条边被打到  $\gamma_1 * \gamma_2$ . 从而  $[\partial h'] = [\gamma_1] + [\gamma_2] - [\gamma_1 * \gamma_2] = 0$ , 所以  $[\gamma_1] + [\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2]$ . 投影到基本群中, 就得到  $\tilde{\Phi}$  是个群同态, 从而根据  $H_1(X)$  的 Abel 性可得到唯一的  $\phi : \pi_1(X, *)^{\text{ab}} \rightarrow H_1(X)$ .

再定义  $\Psi : X^I \rightarrow \pi_1(X, *)$ . 根据  $X$  的道路连通性, 对个  $x \in X$  可选择一条道路  $\gamma_x : x \rightarrow *$ . 现在可以定义

$$\Psi : \sigma \mapsto [\gamma_{\sigma(1)} \circ \sigma \circ \gamma_{\sigma(0)}^{-1}].$$

根据自由性,  $\Psi$  可以线性延拓为 Abel 群同态  $\tilde{\Psi} : S_1(X) \rightarrow \pi_1(X, *)^{\text{ab}}$  (注意这步交换化了之后才能进行). 考虑恰当链在  $\tilde{\Psi}$  下的像, 只需对奇异 2-单形  $\sigma : \Delta_2 \rightarrow X$  考虑

$\tilde{\Psi}(\partial\sigma)$ . 由于

$$(\gamma_{\sigma(v_2)} \circ \sigma|_{[v_1, v_2]} \circ \gamma_{\sigma(v_1)}^{-1}) \circ (\gamma_{\sigma(v_1)} \circ \sigma|_{[v_0, v_1]} \circ \gamma_{\sigma(v_0)}^{-1}) \simeq \gamma_{\sigma(v_2)}^{-1} \circ \sigma|_{[v_0, v_2]} \circ \gamma_{\sigma(v_0)}^{-1},$$

故  $\tilde{\Psi}(\sigma|_{[v_1, v_2]}) \cdot \tilde{\Psi}(\sigma|_{[v_0, v_1]}) = \tilde{\Psi}(\sigma|_{[v_0, v_2]})$ , 所以

$$\tilde{\Psi}(\partial\sigma) = \tilde{\Psi}(\sigma|_{[v_0, v_1]})\tilde{\Psi}(\sigma|_{[v_0, v_2]})^{-1}\tilde{\Psi}(\sigma|_{[v_1, v_2]}) = e.$$

注意我们这里已经把基本群交换化了, 否则运算无法正常进行. 这就导致  $B_1(X) \subset \ker \tilde{\Psi}$ , 因而我们就定义出了群同态

$$\psi: H_1(X) \hookrightarrow S_1(X)/B_1(X) \rightarrow \pi_1(X, *)^{\text{ab}}.$$

一方面, 根据  $\phi$  和  $\psi$  的建构方式显然有  $\psi \circ \phi = \text{id}_{\pi_1}$ , 另一方面考虑  $\phi \circ \psi$ : 对任意的  $[\sum_i a_i \sigma_i] \in H_1(X)$ , 根据  $\sum_i a_i \sigma_i \in Z_1(X)$  可知

$$\partial \sum_i a_i \sigma_i = \sum_i a_i (\sigma_i(1) - \sigma_i(0)) = 0.$$

所以

$$\sum_i a_i ([\gamma_{\sigma_i(1)} \sigma_i \gamma_{\sigma_i(0)}^{-1}]) = \sum_i a_i ([\gamma_{\sigma_i(1)}] + [\sigma_i] - [\gamma_{\sigma_i(0)}]) = \sum_i a_i [\sigma_i].$$

因此我们可以把代表元换成一些以  $*$  为基点的回路之和, 它在  $\psi$  下被打到它自然落在基本群中的像 (在同伦意义下), 然后再通过  $\phi$  被打回来, 因此  $\psi \circ \phi = \text{id}_{H_1}$ . 所以  $\phi$  是同构, 证毕! 

现在我们可以来审视 Van Kampen 定理和 MV-序列之间的关系. 对道路连通空间  $X$  和它的开覆盖  $\{X_0, X_1\}$  满足  $X_0 \cap X_1$  也道路连通, 在一维时使用约化同调序列给出

$$\tilde{H}_1(X_0 \cap X_1) \rightarrow \tilde{H}_1(X_0) \oplus \tilde{H}_1(X_1) \rightarrow \tilde{H}_1(X) \rightarrow 0.$$

所以  $\tilde{H}_1(X) = \text{coker} [\tilde{H}_1(X_0 \cap X_1) \rightarrow \tilde{H}_1(X_0) \oplus \tilde{H}_1(X_1)]$ , 在范畴  $\mathbf{Ab}$  中, 这其实就是说存在 pushout

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{H}_1(X_1) & \\ \nearrow & & \searrow \\ \tilde{H}_1(X_1 \cap X_2) & & \tilde{H}_1(X) \\ \searrow & & \nearrow \\ & \tilde{H}_1(X_2) & \end{array}$$

回忆 Van Kampen 定理其实说的也是  $\pi_1(X, *)$  是一个 pushout:

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(X_1, *) & \\ \nearrow & & \searrow \\ \pi_1(X_1 \cap X_2, *) & & \pi_1(X, *) \\ \searrow & & \nearrow \\ & \pi_1(X_2, *) & \end{array}$$

于是前一个图表其实就是后一个图表取交换化, 想要从 Van Kampen 定理推出一维时的 MV-序列, 只需要验证函子  $(\cdot)^{\text{ab}} : \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$  保 pushout, 或者更一般地保 colimit. 这实际上映出了更广泛的话题:  $(\cdot)^{\text{ab}}$  实际上是遗忘函子 (忘掉 Abel 结构)  $\mathcal{F}$  的左伴随, 即对任意  $G \in \text{Grp}$ ,  $H \in \text{Ab}$ , 均有

$$\text{Hom}_{\text{Ab}}(G^{\text{ab}}, H) \cong \text{Hom}_{\text{Grp}}(G, \mathcal{F}(H)).$$

并且同构是自然的, 这句话的意思不过是重述了  $G^{\text{ab}}$  的泛性质. 事实上, 对任意两个范畴  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ , 如果  $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  是  $G : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$  的左伴随, 那么  $F$  就是保 colimit 的.<sup>1</sup>

**Proposition 1.3.7.** 对任意范畴  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ , 如果  $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  是左伴随函子, 那么对任意  $k \in \mathcal{C}_1[\mathcal{D}]$ , 如果  $\varinjlim(k)$  存在, 那么  $\varinjlim(Fk)$  也存在, 并且

$$\varinjlim(Fk) \cong F(\varinjlim k).$$

*Proof.* 首先我们给出  $\varinjlim k$  的另一种看法: 根据其泛性质 (下述图表是范畴  $\mathcal{C}[\mathcal{D}]$  中的图表)

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\mu} & \Delta(\varinjlim k) \\ & \searrow \mu_X & \downarrow \Delta(f) \\ & & \Delta(X) \end{array}$$

我们得到自然同构

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}[\mathcal{D}]}(k, \Delta(X)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}[\mathcal{D}]}(\Delta(\varinjlim k), \Delta(X)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim k, X).$$

对交换图表

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\mu} & \Delta(\varinjlim k) \\ \downarrow \theta & & \downarrow \\ t & \xrightarrow{\nu} & \Delta(\varinjlim t) \end{array}$$

使用  $\varinjlim k$  的泛性质可知  $\varinjlim$  可实现为  $\mathcal{C}[\mathcal{D}] \rightarrow \mathcal{C}$  的函子, 故它是  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\mathcal{D}]$  的左伴随. 接下来直接验证  $F(\varinjlim k)$  满足我们所希望的泛性质: 设  $F$  的右伴随为  $G$ , 则

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F(\varinjlim k), Y) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(\varinjlim k, GY) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_1[\mathcal{D}]}(k, \Delta(GY)) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_1[\mathcal{D}]}(k, G\Delta(Y)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_2[\mathcal{D}]}(Fk, \Delta(Y)). \end{aligned}$$

能够通过伴随函子的性质验证其中的每个同构都是自然的, 于是  $F(\varinjlim k)$  就是  $Fk$  的 colimit.  $\square$

<sup>1</sup>李文威第二章结尾处有一个证明.

## Week 5: 2025/10/10

我们考虑一些球面同调群的应用.

**Proposition 1.3.8 (Brouwer 不动点定理).** 对任意  $f : D^n \rightarrow D^n$ , 存在  $x \in D^n$  使得  $f(x) = x$ .

*Proof.* 若不然, 我们可以构造一个从  $D^n$  到  $S^{n-1}$  的收缩映射. 只需考虑  $xf(x)$  的反向延长线, 这条射线一定和  $S^{n-1}$  有交, 我们就定义  $F(x)$  是这条射线和  $S^{n-1}$  的交点, 并且在边界上  $F$  是恒等的. 但是这样的收缩一定不存在, 否则存在

$$S^{n-1} \xrightarrow{i} D^n \xrightarrow{f} S^{n-1}$$

诱导出的同调群映射

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(D_n) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(S^{n-1}).$$

满足  $f_* \circ i_* = \text{id}$ . 但是  $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  而  $H_{n-1}(D_n) \cong \{0\}$ , 这不可能!



**Example 1.3.9 (球面映射度 degree).** 对任意  $f : S^n \rightarrow S^n$ , 它诱导出同调群之间的映射  $f_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ . 根据  $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ , 任意选取它的一个代表元 (注意, 这里自动让两边选取一样的代表元了. 否则两边是需要选定定向才可以良定地讨论映射度的.)

把  $f_*$  等同到  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  的群同态, 它一定是某个  $\mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}$ . 称  $f$  的映射度为  $d$ , 记为  $\deg f = d$ . 映射度满足如下性质:

- $\deg(\text{id}) = 1$ ;
- $f, g : S^n \rightarrow S^n$ ,  $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$ . 从而  $\deg$  是  $\text{End}_{\text{Top}}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  的群同态. 其证明在该种定义下是显然的, 因为  $\mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}$  和  $\mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}$  复合得到  $\mathbb{Z} \xrightarrow{d_1 d_2} \mathbb{Z}$ .
- 若  $f \simeq g$ , 则  $\deg f = \deg g$ , 这是同调群同伦不变性的直接推论. 从而  $\deg$  是  $\text{End}_{\text{hTop}}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  的群同态. 有趣的是, 其逆命题也成立, 即如果  $\deg f = \deg g$ , 则  $f \simeq g$ . 其证明见附录 (因为使用方法和这门课差的比较远).
- 如果  $f$  非满射, 则  $\deg f = 0$ . 这是因为此时  $S^n - \{p\} \cong \mathbb{R}^n$ , 所以  $f$  可拆分为  $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$ , 于是  $f$  是可缩映射, 从而  $\deg f = 0$ .
- 如果  $f$  无不动点, 则  $f$  同伦于对径映射  $x \mapsto -x$ . 这是因为此时  $f(x) - x \neq 0$  恒成立, 因此可得到一个同伦

$$F(x, t) = \frac{tf(x) + (1-t)(-x)}{|tf(x) + (1-t)(-x)|}.$$

每个值都是良定义的 (条件用在  $t = 1/2$  处), 从而  $f \simeq [x \mapsto -x]$ .

映射度可以不止定义在球面上, 也可以有其它不同的定义方式 (当然最后会发现它们等价), 比如可使用同伦群  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  来进行初始定义. 比较有趣的是下面比较微分拓扑的定义:

**Definition 1.3.10 (微分拓扑中的映射度).** 设  $S^n$  上的一个积分为 1 的  $n$ -形式为  $\omega$ . 对任意光滑映射  $f: S^n \rightarrow S^n$ , 定义

$$\deg f := \int_{S^n} f^* \omega.$$

上面的定义乍一看和前面完全没有关系, 甚至都不知道为什么  $\deg f$  是整数. 我们一一解决这两个问题: 前者是因为 de Rham 上同调中  $H^n(S^n) \cong \mathbb{R}$  (证明依然是利用 MV Sequence, 我们在 1.3.1 中证明过, 但注意系数是  $\mathbb{R}$ ), 而这个同构关系恰好可以通过

$$\int_{S^n} : \omega \mapsto \int_{S^n} \omega$$

给出. 于是上面的定义不过就是选取了一个生成元并考虑它的像, 如果  $f^*$  给出  $\mathbb{R} \xrightarrow{d} \mathbb{R}$ , 那么映射度就是  $d$ . 从这个角度来说它们应该具有类似的性质.

第二个问题则更加有趣: 这是因为  $\omega$  的选取可以是很随意且很局部的 (奇怪的是我在奇异同调内完全感受不到这点), 比如我们完全可以让  $\omega$  支在任何一个点  $p$  的小邻域内, 使得它沿  $S^n$  积分结果是 1, 那么  $f^* \omega$  也就支在  $f^{-1}(p)$  的小邻域内. 而微分拓扑中的知识告诉我们存在点  $y$  使得  $f^{-1}(y)$  的形态足够好, 是个离散集:

**Theorem 1.3.11 (Sard).** 对微分映射  $f: S^n \rightarrow S^n$ , 如果  $f_*: T_x S^n \rightarrow T_{f(x)} S^n$  不是线性同构, 则称  $x$  是  $f$  的**临界点**. 临界点的像被称为  $f$  的**临界值**, 非临界值被称为**正则值**. 则  $f$  的临界值零测, 特别地正则值存在.

因此我们选择一个正则值  $y \in S^n$ , 它的原像集中每点  $x \in f^{-1}(y)$  处都有  $f_*$  是同构, 所以根据反函数定理  $f$  在  $x$  附近是局部同胚. 所以  $f^{-1}(y)$  是离散集, 再根据  $S^n$  的紧性其中只含有有限个点. 现在选择  $y$  的开邻域  $U$ , 为每个  $x \in f^{-1}(y)$  选择  $U_x \ni x$  使得  $f: U_x \rightarrow U$  是同胚,  $U_x$  两两不交. 现在选取  $\omega$  支在  $U$  中且积分为 1, 则其原像支在  $\bigcup U_x$  中, 并且根据同胚关系,

$$\int_{U_x} f^* \omega = \pm 1.$$

这里正负号取决于  $f_*: T_x S^n \rightarrow T_y S^n$  是否是保定向的. (我们同时为两边确定  $S^n$  的一个定向, 不管选择哪种得到结果是一样的, 这和之前的同调定义是吻合的) 于是我们可定义

$$\deg_x f = \begin{cases} +1, & f \text{ 保定向;} \\ -1, & f \text{ 反定向.} \end{cases}$$

那么  $f$  的映射度为:

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \int_{U_x} f^* \omega = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x f \in \mathbb{Z}.$$

于是用这种方法定义出的映射度是很易于计算的, 因为虽然从定义上我们需要计算积分, 但实际上只需要考虑一些标架的正反定向, 或者说 Jacobi 的正负就可以了, 它更是远好于直接追踪抽象的奇异同调群的生成元 (可以想象这是非常困难的).

**Example 1.3.12.** 比如说考虑对径映射  $\alpha: x \mapsto -x$ , 它可以被拆为  $n$  个反射的复合, 而每个反射都是反定向的, 所以  $\deg \alpha = (-1)^n$ .

这两种定义各自有好的地方, 并且它们都可以推广到一般的 (拓扑/光滑) 流形上去, 定义为  $f$  诱导出的最高阶同调群之间映射的度数. 奇异同调定义的好处是它确实从理论上为连续映射良定义了这些“度数”, 但是做理论推导会显著难于后者. 但这是否是微分拓扑难以逾越的障碍呢? 下面的定理告诉我们其实并不是.

**Theorem 1.3.13 (Whitney 逼近定理).** 设  $M, N$  是光滑流形,  $f: M \rightarrow N$  是连续映射, 则存在与  $f$  同伦的光滑映射  $g: M \rightarrow N$ .

于是我们确实没有缺失信息, 因为任何连续映射的同伦类中都存在一个光滑映射, 所以我们就对光滑的那些做就可以了. 我们有时也会用这个定理把连续映射替换成光滑映射, 以利用上微分拓扑的工具. (一个例子是, 这种逼近的想法可以用来把连续版本的 Brouwer 不动点定理转化为光滑版本的不动点定理)

现在我们回到奇异同调论.

**Example 1.3.14 (双角锥的同调群).** 这个例子是计算球面同调群的推广. 回忆一个空间  $X$  的 (非约化) 双角锥定义为

$$SX = (X \times I) / (X \times \{0\}, X \times \{1\}).$$

(非约化) 锥定义为

$$CX = (X \times I) / (X \times \{0\}).$$

那么  $SX$  可以被写为

$$SX = C_+(X) \cup_X C_-(X).$$

而  $C_+(X)$  和  $C_-(X)$  都是锥, 所以  $\tilde{H}_*(C_+(X)) = \tilde{H}_*(C_-(X)) = \{0\}$ . 因此如果对它应用 MV-sequence, 会得到

$$0 \rightarrow \tilde{H}_{k+1}(S(X)) \rightarrow \tilde{H}_k(X) \rightarrow 0.$$

于是我们有  $\tilde{H}_{k+1}(S(X)) \cong \tilde{H}_k(X)$ . 这个命题其实在约化同调理论中是重要的, 它可被用来替换一般同调理论中相对同调的部分.

接下来我们为证明 Jordan 曲线定理做一些准备.

**Proposition 1.3.15.** 给定  $A \subset S^n$ ,  $A \cong I^k$ , 证明  $\tilde{H}_*(S^n - A) = 0$ .

*Proof.* 证明比较有趣. 首先如果把  $A$  在中间砍一刀被分成  $B, C$  两半, 它们的交  $B \cap C$  同胚于  $I^{k-1}$ . 于是我们想到可以对  $S^n - B$  和  $S^n - C$  利用 MV-序列, 得到

$$\rightarrow \tilde{H}_i(S^n - B \cup C) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n - B) \oplus \tilde{H}_i(S^n - C) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n - B \cap C) \rightarrow \dots$$

这使得我们可以使用归纳：当  $k = 0$  时显然  $\tilde{H}_*(S^n - A) = 0$ ，利用归纳我们不妨设  $k - 1$  时结论成立，则  $\tilde{H}_*(S^n - B \cap C) \cong 0$ . 这导致有同构

$$\tilde{H}_i(S^n - B \cup C) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(S^n - B) \oplus \tilde{H}_i(S^n - C).$$

$S^n - B \cup C = S^n - A$ ，假设  $\tilde{H}_i(S^n - A) \neq 0$ ，取其中一个非平凡的  $[\alpha]$ ，则  $[\alpha]$  的像  $([\alpha_B], -[\alpha_C])$  非零，于是要么有  $\tilde{H}_i(S^n - B) \neq 0$ ，要么有  $\tilde{H}_i(S^n - X) \neq 0$ . 由于两者是对称的，所以我们不妨设是  $\tilde{H}_i(S^n - B) \neq 0$  ( $[\alpha_B] \neq 0$ ). 于是我们可以重复之前的操作：把  $B$  再切成  $B_1, B'_1$  两块，然后得到  $\tilde{H}_i(S^n - B_1) \neq 0$  或者  $\tilde{H}_i(S^n - B'_1) \neq 0$ ，然后选择其中一块.

这样的操作可以无穷进行下去：每次剩下的块越来越小，为了让块最后收缩到一点，我们每次都交错地在每个分量上折半，这样最后会得到包含列

$$A \supset B \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots, \quad \bigcap_l B_l = \{p\}.$$

并且对每个  $B_l$  都有  $\tilde{H}_i(S^n - B_l) \neq \{0\}$ . 更一般地，我们可以具体观察 MV-列给出的序列，发现每个  $\tilde{H}_i(S^n - B_l) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n - B_{l+1})$  都由含入映射诱导，所以  $[\alpha] \in \tilde{H}_i(S^n - A)$  嵌入在每个  $\tilde{H}_i(S^n - B_l)$  中的像都是非平凡的. 但是将  $[\alpha]$  嵌入到  $\tilde{H}_i(S^n - \{p\})$  中时，根据后者的平凡性它是一个恰当链，因此存在  $\beta \in C_{i+1}(S^n - \{p\})$  使得  $\partial\beta = \alpha$ . 但是  $\beta$  具体来说只涉及到有限个  $\Delta_{i+1}$  的像，它们的并是  $S^n - \{p\}$  中的一个紧集. 于是存在某个  $B_l$  使得  $\beta$  也支在  $S^n - B_l$  内，这导致  $\alpha$  在  $S^n - B_l$  上也是恰当链，矛盾，所以原命题成立.  $\square$

**Theorem 1.3.16.** 给定  $A \subset S^n$ ,  $A \cong S^k (0 \leq k < n)$ , 则

$$\tilde{H}_i(S^n - A) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n - k - 1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

*Proof.* 对  $k$  归纳. 当  $A \cong S^0$  时  $S^n - S^0 \cong \mathbb{R}^n - \{p\} \simeq S^{n-1}$ , 计算  $\tilde{H}_i(S^{n-1})$  可知归纳奠基成立. 假设  $k - 1$  时成立，考虑  $k$  时情形. 由于  $A \cong S^k \cong S(S^{k-1})$ , 设  $D$  是  $A$  的赤道 (同胚于  $S^{k-1}$ ),  $B$  为  $A$  的上半球 (同胚于  $C_+(S^{k-1})$ ),  $C$  为  $A$  的下半球 (同胚于  $C_-(S^{k-1})$ ), 根据上题结论，利用 MV-序列可得：

$$\tilde{H}_i(S^n - D) = \tilde{H}_i(S^n - B \cap C) \cong \tilde{H}_{i-1}(S^n - B \cup C) = \tilde{H}_i(S^n - A).$$

因此归纳成立.  $\square$

**Corollary 1.3.17.** 令  $k = n - 1$ ，则对任意嵌入  $S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ ，均有

$$\tilde{H}_i(S^n - S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0; \\ 0, & i \neq 0. \end{cases}$$

这意味着  $S^n - S^{n-1}$  恰含两个不同的道路连通分支. 特别地，当  $n = 2$  时上面的命题就给出 Jordan 曲线定理 (平面上的一条同胚于  $S^1$  的曲线把平面分成两个部分).

**Theorem 1.3.18 (区域不变性定理).** 设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是开集并且  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  是单射, 则  $f$  是开映射.

*Proof.* 将  $U$  视作  $S^n$  的开子集. 我们只需证明对任意  $x \in U$  都存在  $x$  的开邻域  $V$  使得  $f(V)$  是开集. 考虑  $V$  是完全落在  $U$  中的以  $x$  为中心的小开球, 则  $\bar{V} \cong D^n$ ,  $\partial V \cong S^{n-1}$ . 根据  $f$  的单性,  $f(\partial V) \cong \partial V \cong S^{n-1}$ , 所以根据上一个定理,  $S^n - f(\partial V)$  恰有两个不同的连通分支, 分别是  $S^n - f(\bar{V})$  和  $f(V)$ . 由于  $\partial V$  是  $S^n$  中的紧集,  $f(\partial V)$  是  $\mathbb{R}^n$  中的紧集, 因此是闭集. 所以  $S^n - f(\partial V)$  是开集. 根据局部欧氏性, 它的两个连通分支 (也是道路连通分支) 都是开集, 所以  $f(V)$  是开集, 证毕.  $\square$

我们可以再推广一下上面证明过程中讨论降列时所做的事情, 得到一个更理论化的结果:

**Proposition 1.3.19.** 设拓扑空间  $X$  是一列开集的并  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ ,  $U_i \subset U_{i+1}$ . 则

$$H_k(X) \cong \varinjlim H_k(U_i).$$

注意到由于  $X$  是开覆盖, 因此在  $\mathbf{Top}$  中实际上有  $X = \varinjlim (U_i)$ , 所以该命题就是说  $H_k(\cdot)$  保持特殊的一些 colimit. 注意显然  $H_k(\cdot)$  不完全是保持 colimit 的 (比如它不保持 pushout, 以 MV 序列代替). 其证明和 1.3.15 的后半段是类似的, 因为每个奇异单形  $\sigma$  的像都是紧集, 故存在某个  $U_i$  使得  $\sigma$  可作为  $U_i$  上的链.

## Week 6: 2025/10/17

### 1.4 切除定理的证明

我们将证明切除定理 1.3.4. 为了证明包含映射  $\iota$  是链同伦等价, 我们需要构造一个反向映射  $g: S_*(X) \rightarrow S_*^u(X)$  使得  $g \circ \iota \simeq \text{id}_{S_*^u(X)}$  以及  $\iota \circ g \simeq \text{id}_{S_*(X)}$ . 实际上, 我们构造出的  $g$  会是一个**收缩**, 即满足前一个同伦是严格的  $g \circ \iota = \text{id}_{S_*^u(X)}$ .

其实  $g$  的选取在几何上是很自然的: 比如说我们就看 1 维情形, 一个奇异链就是  $X$  中的一条道路  $\gamma$ , 一个  $u$ -小链就是落在某个  $U \in \mathcal{U}$  中的一条道路. 这样根据道路的紧性, 我们可把  $\gamma$  足够细分使得每条小道路都完全落在某个开集  $U \subset \mathcal{U}$  中. 于是就可以把  $\gamma$  映到这些小链之和, 后者就落在  $S_1^u(X)$  中. 对一般的单形, 证明思路也是类似的, 只不过我们需要标准化这个“细分”的流程, 这种方法被称为**重心重分**, 每个奇异链经过足够多次重心重分后的结果都会落在  $S_*^u(X)$  中. 由于  $\sigma$  的自由度是很大的, 自然的想法是先对  $\Delta_n$  定义其重心剖分, 然后把它推广到一般的  $\sigma$  上面, 最后证明它和  $\iota$  一同给出链同伦等价.

设  $X$  是  $\mathbb{R}^p$  中的一个凸集, 定义  $X$  的  $n$  维仿射奇异链为

$$LS_n(X) = \mathbb{Z}\{\sigma: \Delta_n \rightarrow X: \sigma(\sum a_i e_i) = \sum a_i \sigma(e_i), \forall \sum a_i = 1\}.$$

特别定义  $LS_{-1}(X) = \mathbb{Z}\{\emptyset\}$ . 每个仿射奇异单形都完全线性地取决于其顶点处的像, 画在图上可表现为嵌入在  $X$  中“直”的单形. 根据凸性, 任意  $X$  中一些点  $v_0, \dots, v_n$  都唯一确定一个仿射单形, 而所有仿射单形也都能这样得到, 因此可将它直接记作  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ . (这里我产生了第一个疑惑: 明明我们在几何直观上我们就对  $\Delta_n$  重心重分, 然后把剖分结果打到一般的奇异单形上就可以了, 这里为什么突然对凸的  $X$  来讨论  $LS_n(X)$ ? 这是因为重心剖分从一开始就不是对“图形”  $\Delta_n$  定义, 而是要定义成一个链映射的形式, 我们所谓的对图形重心重分其实是对  $X = \Delta_n$  考虑  $B_n(\text{id}_{\Delta_n})$ . 这样重心重分的结果也不是一个图形, 而是一个奇异链 (特别地也带有定向). 我们还需要讨论  $B_n$  是否是一个“链映射”, 这就涉及到类似  $\Delta_{n-1} \rightarrow \partial\Delta_n$  的奇异链的重心重分的定义, 为此我们不止需要考虑  $\text{id}_{\Delta_n}$  的像, 而是选择一个更大的范畴去对所有仿射单形定义其重心重分.)

对任意  $b \in X$ , 我们定义

$$b : LS_n(X) \rightarrow LS_{n+1}(X), \quad [v_0, \dots, v_n] \mapsto [b, v_0, \dots, v_n].$$

意谓把每个奇异单形映为它以  $b$  作为顶点的锥.  $b$  给出了  $\text{id}$  到 0 的链同伦: (因为  $X$  是凸集所以可缩, 这是合理的) 即  $\partial b + b\partial = \text{id}$ :

$$\begin{aligned} \partial b(\sigma) &= [v_0, \dots, v_n] - \sum_{i=0}^n (-1)^i [b, v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] \\ &= \sigma - b(\partial\sigma). \end{aligned}$$

现在我们归纳定义重心重分.

$$B_n : LS_n(X) \rightarrow LS_n(X), \quad \begin{cases} B_{-1} = \text{id}, B_0 = \text{id}, \\ \text{对 } n \geq 1, B_n(\sigma) = b_\sigma(B_{n-1}(\partial\sigma)) \text{ (} b_\sigma \text{ 指 } \sigma \text{ 的重心)}. \end{cases}$$

$B_n$  的意义是: 先把  $\sigma$  的每个面重心重分了, 然后考虑它们关于  $\sigma$  重心  $b_\sigma$  的锥, 拼起来就得到  $\sigma$  的重心重分. 比如把图画出来的话,  $B_1$  就是把线段砍半,  $B_2$  就是先把三角形的三条边砍半, 然后考虑它们关于三角形中心的锥, 得到一个六块三角形的图像. 注意这里重心重分的结果是带有正负号的, 而不是在几何上直观来看每块都是等价的. 这些正负号保证了  $B : LS_*(X) \rightarrow LS_*(X)$  是一个链映射:  $n = 0$  时显然, 假设  $n$  时有  $\partial B_n = B_{n-1}\partial$  成立, 则

$$\begin{aligned} \partial B_{n+1}(\sigma) &= \partial b_\sigma(B_n(\partial\sigma)) = (\text{id} - b_\sigma\partial)(B_n(\partial\sigma)) \\ (\text{归纳假设}) &= B_n(\partial\sigma) - b_\sigma B_{n-1}(\partial\partial\sigma) = B_n(\partial\sigma). \end{aligned}$$

直观来看,  $B$  的作用没有改变奇异单形的图像, 只是把它分成了一些小单形之和, 所以应当不改变  $\sigma$  所在的同调类. 不过严格来说, 我们需要定义从  $B$  到  $\text{id}$  的链同伦.

$$T_n : LS_n(X) \rightarrow LS_{n+1}(X), \quad \begin{cases} T_{-1} = 0, T_0([v]) = [v, v]; \\ T_n(\sigma) = b_\sigma(\sigma - T_{n-1}(\partial\sigma)), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

我们归纳验证  $T$  是  $\text{id}$  和  $B$  之间的链同伦：对  $n = -1, 0$  命题成立，假设  $n$  时成立，

$$\begin{aligned}
 \partial T_{n+1}(\sigma) &= \partial b_\sigma(\sigma - T_n(\partial\sigma)) \\
 &= (\text{id} - b_\sigma \partial)(\sigma - T_n(\partial\sigma)) \\
 &= \sigma - T_n(\partial\sigma) - b_\sigma(\partial\sigma) + b_\sigma \partial T_n(\partial\sigma) \\
 &= \sigma - T_n(\partial\sigma) - b_\sigma(\partial\sigma) + b_\sigma(\text{id} - B_n - T_{n-1}\partial)(\partial\sigma) \\
 &= \sigma - T_n(\partial\sigma) - b_\sigma B_n(\partial\sigma) = \sigma - T_n \partial \sigma - B_{n+1} \sigma.
 \end{aligned}$$

$T_n$  的定义也比较奇怪，而且相对来说没有什么几何直观。我们可用完全以“给定  $B_n$  后，怎样建构链同伦？”这个问题来看  $T_n$  的构造，而不是先给出构造再验证其满足要求。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longleftarrow & LS_0 & \longleftarrow & LS_1 & \longleftarrow & LS_2 \\
 & & \text{id} \downarrow B_0 & \searrow T_0 & \text{id} \downarrow B_1 & \searrow T_1 & \text{id} \downarrow B_2 \\
 0 & \longleftarrow & LS_0 & \longleftarrow & LS_1 & \longleftarrow & LS_2
 \end{array}$$

我们先看  $T_0$ 。根据定义， $B_0 = \text{id}$ ，所以  $T_0$  只需满足  $\partial T_0 = 0$ ，我们取的  $T_0([v]) = [v, v]$  满足该要求。再来看  $T_1$  的选取：它满足  $\partial T_1 = \text{id} - B_1 - T_0 \partial$ 。注意到

$$\begin{aligned}
 \partial(\text{id} - B_1 - T_0 \partial) &= (\text{id} - B_0) \partial - (\partial T_0) \partial \\
 &= (\text{id} - B_0 - \partial T_0) \partial = T_{-1} \partial \partial = 0.
 \end{aligned}$$

并且  $H_1(LS_*(X)) = 0$ ，所以对每个  $\sigma$  均存在  $c(\sigma) \in LS_2$  使得

$$\partial c(\sigma) = (\text{id} - B_1 - T_0 \partial)(\sigma)$$

我们令  $T_1(\sigma) = c(\sigma)$  即可。

具体地，对任意  $b \in X$ ， $\partial \sigma = 0 \Rightarrow \partial(b\sigma) = \sigma - b(\partial\sigma) = \sigma$ ，所以就可以选择

$$c(\sigma) = b((\text{id} - B_1 - T_0 \partial)(\sigma)) = b(\sigma - B_1(\sigma) - T_0 \partial \sigma).$$

最后，如果选取  $b = b_\sigma$ ，则

$$\partial b_\sigma B_1(\sigma) = B_1(\sigma) - b_\sigma \partial B_1(\sigma) = B_1(\sigma) - b_\sigma B_0(\partial\sigma) = B_1(\sigma) - B_1(\sigma) = 0.$$

所以这一项是零调的，把它扔掉就得到上面所定义的  $T$ 。

现在我们把些算子推广到一般的拓扑空间中。方法是先在单形  $\Delta_n$  上进行剖分，然后再投影到空间  $X$  上。

**Definition 1.4.1.** 对一般拓扑空间  $X$  定义**重心重分映射**。一方面，当  $X = \Delta_n$  并且  $\sigma = \text{id}_{\Delta_n}$  时，我们已经定义  $B_n(\text{id}_{\Delta_n}) \in LS_n(\Delta_n) \subset S_n(\Delta_n)$ 。现在对任意的  $X$  和任意的  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ ， $\sigma_\#$  将  $S_n(\Delta_n)$  送到  $S_n(X)$ 。定义

$$B(\sigma) = \sigma_\#(B_n(\text{id}_{\Delta_n})).$$

有时可用更直观地写为

$$B : S_n(X) \rightarrow S_n(X), \quad [\sigma : \Delta_n \rightarrow X] \mapsto \sigma_{\#}(B(\Delta_n)).$$

类似定义**重心链同伦**. 我们已经定义  $T_n(\text{id}_{\Delta_n}) \in LS_{n+1}(\Delta_n) \subset S_{n+1}(\Delta_n)$ . 对任意  $X$  和任意的  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ , 定义

$$T(\sigma) = \sigma_{\#}(T_n(\text{id}_{\Delta_n})) \in S_{n+1}(X).$$

可更直观地写为

$$T : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X), \quad [\sigma : \Delta_n \rightarrow X] \mapsto \sigma_{\#}(T(\Delta_n)).$$

新的定义对  $\sigma \in LS_n(X)$  是和之前的定义相容的, 因此我们采用相同的记号. 我们验证新的  $B$  和  $X$  分别是链映射和链同伦, 这是自然性的直接推论: 比如说对  $\sigma = \text{id}_{\Delta_n}$  我们有

$$B\partial(\text{id}_{\Delta_n}) = \partial B(\text{id}_{\Delta_n}).$$

(因为所有运算均在  $LS$  中进行) 那么

$$\begin{aligned} \partial B(\sigma) &= \partial \sigma_{\#} B(\text{id}_{\Delta_n}) = \sigma_{\#} \partial B(\text{id}_{\Delta_n}) \\ &= \sigma_{\#} B(\partial \text{id}_{\Delta_n}) = B(\sigma_{\#}(\partial \text{id}_{\Delta_n})) = B(\partial \sigma). \end{aligned}$$

链同伦是类似的, 这里不再验证.

接下来我们尝试构造  $S_*(X) \rightarrow S_*^{\mathcal{U}}(X)$  的链映射. 可以证明对  $n$  维单形, 每次重心重分后最大单形的直径至多为之前的  $\frac{n}{n+1}$ . 根据数学分析中的 Lebesgue 数引理, 足够多次重心重分后每个单形的像都落在某个  $U \in \mathcal{U}$  中, 即对任意  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$  存在  $m > 0$  使得  $B^m(\sigma) \in S_*^{\mathcal{U}}(X)$  (表示  $B$  复合  $m$  次).

问题在于, 这个  $m$  未必对所有单形都是一致的. 虽然根据  $\text{id} \simeq B$  容易得到  $\text{id} \simeq B^m$ , 但是未必能找到一个  $m$  使得对所有  $\sigma$  均有  $B^m(\sigma) \in S^{\mathcal{U}}(X)$ . 我们只能作如下定义:

$$\eta : S_n(X) \rightarrow S_n^{\mathcal{U}}(X), \quad [\sigma : \Delta_n \rightarrow X] \mapsto B^{m(\sigma)}\sigma,$$

其中  $m(\sigma)$  是最小的满足  $B^m(\sigma) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$  的自然数. 注意  $\eta$  未必是链映射, 因为

$$\partial \eta(\sigma) = \partial B^{m(\sigma)}(\sigma) = B^{m(\sigma)}(\partial \sigma) \neq B^{m(\partial \sigma)}(\partial \sigma).$$

(这里  $m(\partial \sigma)$  严格来说不是一个数, 对  $\partial \sigma$  中的每个面这个值不一样) 但我们仍然可以逐点定义  $\hat{D} : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X)$  满足

$$\hat{D} : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X), \quad [\sigma : \Delta_n \rightarrow X] \mapsto D^{m(\sigma)}(\sigma).$$

其中  $D^m$  是链同伦  $\text{id} \simeq B^m$ . 由于  $T$  给出同伦  $\text{id} \simeq B$ , 因此  $TB^k$  给出同伦  $B^k \simeq B^{k+1}$ , 所以  $D^m$  可具体表示为

$$D^m = T + TB + \cdots + TB^{m-1}.$$

同样  $\hat{D}$  也不是链同伦. 回忆我们在命题 1.1.6 的注记中说过, 给定任何一族群同态  $\{T_n : C_n \rightarrow D_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\{\partial T_n + T_{n-1}\partial\}_{n \in \mathbb{Z}}$  都给出  $C_* \rightarrow D_*$  的链映射, 并且  $T$  给出从这个链映射到 0 的链同伦.

从而我们可强行考虑链映射  $\partial\hat{D} + \hat{D}\partial$ , 它满足

$$\begin{aligned}\partial\hat{D}(\sigma) + \hat{D}\partial(\sigma) &= \partial D^{m(\sigma)}(\sigma) + D^{m(\partial\sigma)}(\partial\sigma) \\ &= \sigma - B^{m(\sigma)}(\sigma) - D^{m(\sigma)}(\partial\sigma) + D^{m(\partial\sigma)}(\partial\sigma).\end{aligned}$$

定义

$$\varepsilon(\sigma) = B^{m(\sigma)}(\sigma) + D^{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D^{m(\partial\sigma)}(\partial\sigma).$$

则  $\varepsilon$  是链映射, 并且  $T$  是  $\varepsilon$  和  $\text{id}$  之间的链同伦. 于是我们只需要说明这个新定义出来的  $\varepsilon$  满足  $\varepsilon(\sigma) \in S_*^u(X)$  即可. (这是该命题从开始到现在唯一一个巧妙的步骤, 也说明了最后得到的链映射并不完全是直观上的重心重分.) 由于已经有  $B^{m(\sigma)}(\sigma) \in S_n^u(X)$ , 只需证明  $D^{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D^{m(\partial\sigma)}(\partial\sigma)$  是  $\mathcal{U}$ -奇异小链.

核心观察是当  $\sigma$  被剖分地足够细时, 它的边界也被剖分的足够细, 即  $m(\sigma)$  次剖分已经足以使  $\sigma$  的任意面成为  $\mathcal{U}$ -奇异小链. 设  $\partial\sigma = \sum a_i \tau_i$ , 根据  $D$  的表达式

$$\begin{aligned}D^{m(\sigma)}(\tau) - D^{m(\tau)}(\tau) &= (T + \cdots + TB^{m(\sigma)-1})(\tau) - (T + \cdots + TB^{m(\tau)-1})(\tau) \\ &= (TB^{m(\tau)} + \cdots + TB^{m(\sigma)})(\tau) \in S_n^u(X).\end{aligned}$$

所以  $\varepsilon$  就给出了我们想要的  $S_*(X) \rightarrow S_*^u(X)$ . 最后, 对任意  $\sigma \in S_*^u(X)$  均有  $m(\sigma) = 0$  以及  $m(\partial\sigma) = 0$ , 所以  $B^{m(\sigma)} = \text{id}$  而  $D = 0$ , 即  $\varepsilon|_{S_*^u(X)} = \text{id}$ . 于是  $\varepsilon \circ \iota = \text{id}$ , 这就证完了  $\varepsilon$  是  $\iota$  的同伦等价逆.  $\square$

*Remark.* 关于这个证明 (可能之后再也不用不到了) 最后再说几句. 如果我们的目标是证明  $\iota_* : H_*^u(X) \rightarrow H_*(X)$  是群同构的话, 其实不需要考虑后面的技术性操作, 也不需要考虑  $T$  具体是什么. 当我们定义出对任意奇异链的重心重分后, 可以这样考虑命题的证明:

- $\iota_*$  是单射: 即证如果  $b \in Z_n^u(X)$  满足  $\iota_\# b$  零调, 则  $b$  零调. 取  $a \in S_{n+1}(X)$  使得  $\partial a = b$ , 则存在  $m$  使得  $B^m(a) \in S_{n+1}^u(X)$ , 并且  $\partial B^m(a) = B^m(\partial a) = B^m(b)$ . 由于  $B^m \simeq \text{id}$  并且链同伦  $T$  是保  $\mathcal{U}$ -小链的 (这是自然构造的直接推论), 因此  $B^m(b)$  在  $S_n^u(X)$  中零调可推出  $b$  在  $S_n^u(X)$  中零调.
- $\iota_*$  是满射: 对任意  $b \in Z_n(X)$ , 存在  $m$  使得  $B^m(b) \in S_n^u(X)$ , 并且  $\partial B^m(b) = B^m(\partial b) = 0$ . 所以  $B^m(b) \in Z_n^u(X)$ , 还是根据链同伦  $B^m \simeq \text{id}$  推得  $B^m(b)$  和  $b$  作为  $Z_n(X)$  中的链落在同个同调类中, 因此  $\iota_*[B^m(b)] = [b]$ .

此外, 有如下不平凡的同调代数结论:

- 如果  $C, D \in \text{Ch}_*(\text{Ab})$  是自由链复形,  $f : C \rightarrow D$  诱导出同调群之间的同构  $f_* : H_*(C) \cong H_*(D)$ , 则  $f$  是链同伦.

由于奇异链复形就是自由链复形, 该结论告诉我们其实上面证明就已经给出  $\iota_{\sharp}$  是链同伦了.

## Week 7: 2025/10/22 2025/10/24

我们来定义相对同调群.

**Definition 1.4.2 (相对同调 Relative Homology).** 设  $X$  是拓扑空间,  $A \subset X$ , 则  $S_*(A)$  是  $S_*(X)$  的子链复形. 因此我们可以逐项定义它们的商为相对链复形

$$S_k(X, A) = S_k(X) / S_k(A).$$

相对同调群就定义为

$$H_k(X, A) := H_k(S_*(X, A)).$$

根据相对链复形的定义, 有链复形之间的短正合列

$$0 \rightarrow S_*(A) \rightarrow S_*(X) \rightarrow S_*(X, A) \rightarrow 0.$$

从而它诱导出同调群的长正合列

$$\cdots \rightarrow H_k(A) \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(X, A) \rightarrow H_{k-1}(A) \rightarrow \cdots$$

因此  $H_k(X, A)$  的确衡量了  $H_k(A)$  和  $H_k(X)$  之间的相对差距, 比如如果恒有  $H_k(A) \cong H_k(X)$  成立那么就有  $H_k(X, A) \cong 0$ .

之前定义的约化同调群其实可以更自然地理解为带基点拓扑空间关于基点的相对同调  $H_k(X, *)$ . 这是因为如果考虑增广链复形

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_*(A) & \longrightarrow & S_*(X) & \longrightarrow & S_*(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

类似上述命题的证明, 对三元组  $(X, A, B)$  满足  $X \supset A \supset B$  均有链复形之间的短正合列

$$0 \rightarrow S_*(A, B) \rightarrow S_*(X, B) \rightarrow S_*(X, A) \rightarrow 0.$$

从而上述同调群长正合列还有三元版本:

$$\cdots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, B) \rightarrow \cdots$$

我们在经常说切除定理时, 实际上是指下述命题:

**Theorem 1.4.3 (切除定理 Excision).** 若  $X$  的子空间  $Z, A$  满足

$$Z \subset \overline{Z} \subset A^\circ \subset A \subset X,$$

则

$$H_*(X - Z, A - Z) \cong H_*(X, A).$$

直观来讲, 考虑  $X$  关于  $A$  的相对同调类似于在  $X$  中挖去  $A$  的贡献 (更像考虑  $X/A$ ?), 这其实和在  $X - Z$  中挖去  $Y - Z$  所得结果是一样的.

*Proof.* 考虑  $\mathcal{U} = \{(X - Z), A\}$ , 则  $X - \overline{Z}$  和  $A^\circ$  的并覆盖整个  $X$ , 因此  $\mathcal{U}$  中每个开集的内部覆盖  $X$ . 因此存在链同伦等价

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_*(X).$$

具体写出  $S_*^{\mathcal{U}}(X)$  的定义,

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) = \mathbb{Z}\{f : \Delta_* \rightarrow X : \text{im } f \subset A \text{ or } \text{im } f \subset X - Z.\}$$

那么  $S_*(A)$  可以很自然地实现为  $S_*^{\mathcal{U}}(X)$  的一个子链复形, 并且

$$S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*(A) \cong S_*(X - Z)/S_*(A \cap (X - Z)) = S_*(X - Z)/S_*(A - Z).$$

接下来建立链复形之间的链映射, 利用五引理. 

**Proposition 1.4.4.** 设  $A$  是  $X$  的闭子空间, 并且  $A$  是它在  $X$  中的一个开邻域的形状收缩核. 则

$$H_*(X, A) \cong H_*(X/A, A/A) \cong \hat{H}_*(X/A).$$

(注: 只要  $(X, A)$  是 cofibration pair, 这件事情就成立.)

*Proof.* 设  $r : U \times I \rightarrow U$  是到  $A$  的形变收缩. 那么  $\iota : A \rightarrow U$  是同伦等价, 因此

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_*(A) & \longrightarrow & S_*(X) & \longrightarrow & S_*(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_*(U) & \longrightarrow & S_*(X) & \longrightarrow & S_*(X, U) \longrightarrow 0 \end{array}$$

于是可得到同调群之间的同构  $H_*(X, A) \cong H_*(X, U)$ . 根据切除定理进一步得到  $H_*(X, U) \cong H_*(X - A, U - A)$ .

另一方面, 根据  $U/A$  的泛性质, 对每个  $t \in [0, 1]$  均有交换图表

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{r_t} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ U/A & \xrightarrow{\overline{r}_t} & U/A \end{array}$$

从而  $\bar{r}_1$  和  $\bar{t} : A/A \rightarrow U/A$  为同伦等价对, 从而类似的该同伦等价可诱导出同调群之间的同构  $H_*(X/A, A/A) \cong H_*(X/A, U/A)$ . 根据切除定理,  $H_*(X/A, U/A) \cong H_*(X/A - A/A, U/A - A/A)$ . 注意到

$$X/A - A/A \cong X - A, \quad U/A - A/A \cong U - A.$$

于是上述所有同调群都是同构的:

$$\begin{aligned} H_*(X, A) &\cong H_*(X, U) \cong H_*(X - A, U - A) \\ &\cong H_*(X/A - A/A, U/A - A/A) \cong H_*(X/A, U/A) \cong H_*(X/A, A/A). \end{aligned}$$

证毕.  $\square$

*Remark.* 这个命题有更容易理解的证明, 对  $i : A \rightarrow X$  考虑映射锥  $Ci = CA \cup X$ , 根据切除定理,

$$H_*(Ci, CA) \cong H_*(Ci - *, CA - *) \cong H_*(X, A).$$

后一个同构是因为存在同伦  $(Ci - *, CA - *) \rightarrow (X, A)$ . 根据  $CA$  可缩可知, 利用相对同调的长正合列有

$$H_*(Ci, CA) \cong H_*(Ci, *) = \tilde{H}_*(Ci).$$

另一方面, 根据  $(A, X)$  是余纤维化对可知存在同伦等价  $(Ci, *) \rightarrow (X/A, *)$ , 于是  $\tilde{H}_*(Ci) \cong \tilde{H}_*(X/A)$ .

所以更广泛的命题其实是映射锥和相对同调之间的关系, 到  $\tilde{H}_*(X/A)$  的同构实际上是附加的一个命题. (奇怪的是这里的命题为什么会和 NDR property 互不蕴含呢?)

刚刚的证明中我们实际上用到了下述命题:

**Proposition 1.4.5.** 若  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  是  $\text{Top}(2)$  中同伦的映射, 则  $f_\# = g_\# : S_*(X, A) \rightarrow S_*(Y, B)$ .

**Example 1.4.6 (黏贴胞腔).** 设  $Y$  是拓扑空间,  $f : S^{n-1} \rightarrow \partial D^n \rightarrow Y$ , 则可定义

$$X = Y \cup_f D^n = Y \sqcup D^n / (f(x) \sim x, x \in \partial D^n) = C(f).$$

则  $X$  可看作  $S^{n-1} \xrightarrow{f} Y$  所给出的锥.

则我们可通过  $Y$  的同调群来计算  $X$  的同调群. 在  $D^n$  内部选取一点  $*$ , 根据切除定理,

$$H_*(X, D^n) \cong H_*(X - *, D^n - *) \cong H^*(X - D^n, S^{n-1}) \cong H_*(Y, S^{n-1}).$$

因此根据相对同调的长正合列,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_k(X) &\cong H_k(X, D^n), \quad \tilde{H}_k(Y) \cong H_k(Y, S^{n-1}) \quad (k \neq n-1, n); \\ 0 \rightarrow \tilde{H}_n(Y) &\rightarrow H_n(Y, S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_{n-1}(Y) \rightarrow H_{n-1}(Y, S^{n-1}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

即

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(Y) \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(Y) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(X) \rightarrow 0.$$

因此除了  $n-1, n$  两个分量之外, 其余分量上均有  $\tilde{H}_n(Y) \cong \tilde{H}_n(X)$ , 剩下两个分量可能发生变化, 对 CW 复形有一个统一的计算方法去计算这两个分量上的同调群.

例: 计算  $T^2$  的同调群

*Proof.*



## A Appendix A: Homeworks

### A.1 第一次作业

#### Problem 1: 习题 1.3

设  $A$  是一个取定的拓扑空间. 对任意拓扑空间  $X$ , 以  $[A, X]$  记同伦类的集合  $\{A \rightarrow X \text{ 的同伦类}\}$ . 映射  $f: X \rightarrow Y$  使  $\phi: A \rightarrow X$  的同伦类变成  $f \circ \phi: A \rightarrow Y$  的同伦类. 试论证, 我们这样得到一个协变函子

$$[A, \cdot]: \{\text{空间}, \text{映射}\} \rightarrow \{\text{集合}, \text{函数}\}.$$

*Proof.* 设  $f_*: [A, X] \rightarrow [A, Y]$ ,  $[\phi] \mapsto [f \circ \phi]$ . 首先证明这是良定的, 因为如果  $\phi \simeq \phi'$  那么  $f \circ \phi \simeq f \circ \phi'$ . 然后证明对  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ . 直接验证即可:

$$g_* \circ f_*[\phi] = g_*[f \circ \phi] = [(g \circ f) \circ \phi] = (g \circ f)_*[\phi].$$

最后对  $\phi: A \rightarrow X$ ,  $[\text{id}_X \circ \phi] = [\phi]$ , 故  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{[A, X]}$ . 综上所述,  $[A, \cdot]$  是函子. 

#### Problem 2: 习题 1.4

设  $A$  是一个取定的拓扑空间. 对任意拓扑空间  $X$ , 以  $[X, A]$  记同伦类的集合  $\{X \rightarrow A \text{ 的同伦类}\}$ . 映射  $f: X \rightarrow Y$  使  $\phi: Y \rightarrow A$  的同伦类变成  $\phi \circ f: X \rightarrow A$  的同伦类. 试论证, 我们这样得到一个反变函子

$$[\cdot, A]: \{\text{空间}, \text{映射}\} \rightarrow \{\text{集合}, \text{函数}\}.$$

*Proof.* 设  $f_*: [Y, A] \rightarrow [X, A]$ ,  $[\phi] \mapsto [\phi \circ f]$ . 首先证明这是良定的, 因为如果  $\phi \simeq \phi'$  那么  $\phi \circ f \simeq \phi' \circ f$ . 然后证明对  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $f_* \circ g_* = (g \circ f)_*$ . 直接验证即可: 对  $[\phi] \in [Z, A]$ ,

$$f_* \circ g_*[\phi] = f_*[\phi \circ g] = [\phi \circ (g \circ f)] = (g \circ f)_*[\phi].$$

最后对  $\phi: A \rightarrow X$ ,  $[\phi \circ \text{id}_X] = [\phi]$ , 故  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{[X, A]}$ . 综上所述,  $[\cdot, A]$  是函子. 

#### Problem 3: 习题 2.1

给出书上命题 2.4 的证明: 链映射之间的链同伦关系是一个等价关系.

*Proof.*  $f: C_* \rightarrow D_*$  和  $g: C_* \rightarrow D_*$  链同伦当且仅当存在  $T: C_* \rightarrow D_{*+1}$  使得  $\partial T + T\partial = g - f$ .

- 自反性: 取  $T = 0$  (指把每个  $C_q$  中元素都映到  $D_{q+1}$  中的 0) 可知  $\partial T + T\partial = 0 = g - f$ , 因此  $f \simeq f$ .

- 对称性: 已知  $f \simeq g$ , 取  $T' = -T$ . 则  $\partial T' + T' \partial = -\partial T - T \partial = -(g - f) = f - g$ , 因此  $g \simeq f$ .
- 传递性: 如果  $T_1, T_2$  分别给出同伦  $f \simeq g$  和  $g \simeq h$ , 那么  $\partial(T_1 + T_2) + (T_1 + T_2) \partial = (g - f) + (h - g) = h - f$ , 因而  $f \simeq h$ .

因此链同伦是等价关系.



#### Problem 4: 习题 2.2

设  $f \simeq f' : C \rightarrow D$ ,  $g \simeq g' : D \rightarrow E$  都是链同伦的链映射, 试证:  $g \circ f \simeq g' \circ f' : C \rightarrow E$ .

*Proof.* 设  $T_1$  给出链同伦  $f \simeq f'$ ,  $T_2$  给出链同伦  $g \simeq g'$ . 则我们可定义  $g \circ T_1 : C_* \rightarrow D_{*+1} \rightarrow E_{*+1}$  以及  $T_2 \circ f' : C_* \rightarrow D_* \rightarrow E_{*+1}$ . 根据  $g$  为链映射,

$$\partial T_1 + T_1 \partial = f' - f \Rightarrow g \partial T_1 + g T_1 \partial = g f' - g f \Rightarrow \partial(g T_1) + (g T_1) \partial = g f' - g f.$$

因此  $g \circ f \simeq g \circ f'$ .

$$\partial T_2 + T_2 \partial = g' - g \Rightarrow \partial T_2 f' + T_2 \partial f' = g' f' - g f' \Rightarrow \partial(T_2 f') + (T_2 f') \partial = g' f' - g f'.$$

因此  $g \circ f' \simeq g' \circ f'$ , 根据传递性,  $g \circ f$  和  $g' \circ f'$  链同伦.



#### Problem 5: 习题 2.3

证明链同伦等价是链复形之间的等价关系.

*Proof.* 上一道习题保证了以全体链复形作为对象, 链复形之间的链映射同伦等价类作为态射可构成一个范畴 ( $C$  处的单位态射是  $\text{id}_C$  所在的链同伦等价类). 于是链同伦等价的链复形是该范畴中同构的对象.

只需证明任意范畴  $\mathcal{C}$  中对象同构是等价关系.

- 自反性:  $\text{id}_X$  是从  $X$  到自身的可逆态射, 所以  $X \cong X$ .
- 对称性: 如果存在可逆态射  $f : X \rightarrow Y$ , 那么  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  是可逆态射, 所以  $Y \cong X$ .
- 传递性: 如果存在可逆态射  $f : X \rightarrow Y$  和  $g : Y \rightarrow Z$ , 那么  $g \circ f : X \rightarrow Z$  是可逆态射, 其逆为  $f^{-1} \circ g^{-1}$ . 所以  $X \cong Z$ .

证毕.



## Problem 6: 思考题 3.6

设  $X$  是平面  $\mathbb{R}^2$  上的图形“拓扑学家的正弦曲线”

$$\begin{aligned} & \{y = \sin(1/x), 0 < x < 1/\pi\} \cup \{y = -2, 0 < x < 1/\pi\} \\ & \cup \{x = 0, -2 \leq y \leq 1\} \cup \{x = 1/\pi, -2 \leq y \leq 0\}. \end{aligned}$$

计算  $H_*(X)$ .

*Proof.* 记  $X_t = \{y = \sin(1/x), 0 < x < t\}$ . 我们首先证明对任意奇异单形  $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$ , 存在  $t > 0$  使得  $\sigma(\Delta_q) \cap X_t = \emptyset$ . 若不然, 则存在极限为零的递减列  $\{x_i\}_{i \geq 1}$  使得  $(x_i, \sin(1/x_i)) \in \sigma(\Delta_q)$ . 假设存在  $t \in (x_{i+1}, x_i)$  使得  $(t, \sin(1/t)) \notin \sigma(\Delta_q)$ . 根据  $X_t$  是开集可知  $\sigma^{-1}(X_t)$  是开集. 再考虑  $X - X_t - \{(t, \sin(1/t))\}$ : 首先

$$\begin{aligned} & \{y = \sin(1/x), t < x < 1/\pi\} \cup (\{1/\pi\} \times [-2, 0]) \\ & \cup ([0, 1/\pi] \times \{-2\}) \cup (\{0\} \times [-2, -1]) \end{aligned}$$

是开集, 所以其原像是开集. 还剩下  $\{0\} \times [-1, 1]$  这个部分, 如果  $\sigma(x) \in \{0\} \times [-1, 1]$ , 考虑  $\sigma(x)$  的一个小开邻域  $N$ , 其原像为包含  $x$  的小开邻域, 选其中一个以  $x$  为中心的开圆盘  $B$ , 则  $\sigma(B) \subset N$  是道路连通集. 但是在  $N$  中  $N \cap \{x = 0\}$  和  $N \cap \{x > 0\}$  处于不同的道路连通分支中, 所以  $\sigma(B) \subset X - X_t - \{(t, \sin(1/t))\}$ . 这导致  $\sigma^{-1}(X - X_t - \{(t, \sin(1/t))\})$  也是开集, 所以  $\Delta_q$  可写成两个非空开集的拆分 (两边一个含有  $\sigma^{-1}(x_{i+1})$  一个含有  $\sigma^{-1}(x_i)$ ), 这与其连通性矛盾.

于是对任意  $t \in (0, x_1)$  均有  $(t, \sin(1/t)) \in \sigma(\Delta_q)$ , 对足够大的  $n$  总有  $(1/n\pi, 0) \in \sigma(\Delta_q)$ , 记其在  $\sigma$  下的原像为  $y_n$ . 根据  $\Delta_q$  的紧性存在一个子列  $\{y_{n_i}\} \rightarrow y$ , 所以  $\sigma(y) = \lim_{i \rightarrow \infty} (1/n_i\pi, 0) = (0, 0)$ . 但是之前已经说明  $\sigma(y) = (0, 0)$  可推出存在  $y$  的开邻域  $B$  使得  $\sigma(B) \subset X - X_{x_1}$ , 二者矛盾.

回到同调群的讨论. 容易验证  $X$  是道路连通的, 所以  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ . 对  $q \geq 1$ , 对任何闭链  $\sum a_i \sigma_i$ , 由于这是有限求和,  $\bigcup \sigma_i(\Delta_q)$  被包含在某个  $X \setminus X_t$  中. 但  $X \setminus X_t$  显然是可缩空间, 因此它在  $q \geq 1$  处的同调群平凡. 而  $\sum a_i \sigma_i$  当然也可以作为  $X \setminus X_t$  上的  $q$  维闭链, 所以它是  $q$  维恰当链, 进而也是  $X$  上的恰当链. 这导致  $H_q(X) = 0$ . 所以  $X$  的同调群和  $\{\text{pt}\}$  的同调群相同.



## Problem 7: 习题 4.3

证明同调序列有自然性. 即如果有两个链复形短正合列之间的链映射

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

则它们诱导出同调群长正合列之间的链映射.

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_q(A) & \xrightarrow{f_*} & H_q(B) & \xrightarrow{g_*} & H_q(C) & \xrightarrow{\delta_*} H_{q-1}(A) \longrightarrow \\ & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & \\ \longrightarrow & H_q(A') & \xrightarrow{f'_*} & H_q(B') & \xrightarrow{g'_*} & H_q(C') & \xrightarrow{\delta'_*} H_{q-1}(A') \longrightarrow \end{array}$$

*Proof.* 首先根据  $(fg)_* = f_*g_*$  可知  $\beta f = f'\alpha \Rightarrow \beta_*f_* = (\beta f)_* = (f'\alpha)_* = f'_*\alpha_*$ , 从而前两个方块都是交换的, 只需验证第三个方块交换.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_q & \longrightarrow & B_q & \xrightarrow{g} & C_q \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A'_q & \longrightarrow & B'_q & \xrightarrow{g'} & C'_q \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A_{q-1} & \longrightarrow & B_{q-1} & \xrightarrow{f} & C_{q-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & A'_{q-1} & \longrightarrow & B'_{q-1} & \xrightarrow{f'} & C'_{q-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

$\begin{matrix} [b] & & [a] \\ \swarrow & & \swarrow \\ \alpha & & \gamma \\ \swarrow & & \swarrow \\ \alpha & & \gamma \\ \swarrow & & \swarrow \\ \alpha & & \gamma \end{matrix}$ 
 $\begin{matrix} [c] = \delta[a] & & [\partial b] \\ \swarrow & & \swarrow \\ \alpha & & \gamma \\ \swarrow & & \swarrow \\ \alpha & & \gamma \end{matrix}$ 
 $\begin{matrix} [\alpha c] & & [\partial \beta b] \\ \swarrow & & \swarrow \\ \alpha & & \gamma \\ \swarrow & & \swarrow \\ \alpha & & \gamma \end{matrix}$

构建  $\delta$  需要为  $a \in C_q$  选择原像  $b \in B_q$ , 打到  $\partial b$  后再选择原像  $c \in A_{q-1}$ . 从图中可以看出,  $g'\beta(b) = \gamma g(b)$ , 所以可以把  $\beta b$  作为  $\gamma a$  的原像, 再根据  $\partial \beta(b) = \beta \partial(b)$  以及  $\beta \partial(b) = \beta f(c) = f \alpha(c)$  可知能选择  $\alpha(c)$  作为  $\partial \beta b$  的原像. 我们已经证明了  $\delta$  和这些原像具体选取无关, 所以应有  $\delta_*[\gamma a] = \alpha(\delta_*[a])$ , 因此  $\delta_*\gamma_* = \alpha_*\delta_*$ , 证毕.  $\left\langle \frac{a}{\gamma} \right\rangle$

## Problem 8: 习题 4.4

证明五引理.

*Proof.*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\phi_1} & A_2 & \xrightarrow{\phi_2} & A_3 & \xrightarrow{\phi_3} & A_4 & \xrightarrow{\phi_4} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & B_4 & \xrightarrow{\psi_4} & B_5 \end{array}$$

先证明  $f_3$  是满射: 任取  $a \in B_3$ , 则  $b = \psi_3(a) \in B_4$ , 根据  $B_4$  处的正合性可知  $\phi_4(b) = 0$ . 根据  $f_4$  的满性, 存在  $c \in A_4$  使得  $f_4(c) = b$ , 从而  $f_5\phi_4(c) = \psi_4f_4(c) = 0$ . 根据  $f_5$  的单性,  $\phi_4(c) = 0$ . 根据  $A_4$  处的正合性可知存在  $d \in A_3$  使得  $\phi_3(d) = c$ , 并且  $b = f_4\phi_3(d) = \psi_3f_3(d)$ . 这就导致  $\psi_3(f_3(d) - a) = 0$ , 根据  $B_3$  处的正合性可知

存在  $e \in B_2$  使得  $\psi_2(e) = f_3(d) - a$ . 根据  $f_2$  的满性可知存在  $g \in A_2$  使得  $f_2(g) = e$ , 从而  $f_3\phi_2(g) = \psi_2f_2(g) = f_3(d) - a$ , 因此  $f_3(d - \phi_2(g)) = a$ , 证毕.

再证明  $f_3$  是单射: 任取  $a \in A_3$  使得  $f_3(a) = 0$ , 则  $f_4\phi_3(a) = \psi_3f_3(a) = 0$ , 因此根据  $f_4$  的单性可知  $\phi_3(a) = 0$ . 根据  $A_3$  处的正合性, 存在  $b \in A_2$  使得  $\phi_2(b) = a$ . 记  $f_2(b) = c$ . 则  $\psi_2(c) = \psi_2f_2(b) = f_3\phi_2(b) = 0$ , 从而根据  $B_2$  处的正合性可知存在  $d \in B_1$  使得  $\psi_1(d) = c$ . 根据  $f_1$  的满性可知存在  $e \in A_1$  使得  $f_1(e) = d$ , 从而  $f_2\phi_1(e) = \psi_1f_1(e) = c$ , 所以  $f_2(\phi_1(e) - b) = 0$ . 根据  $f_2$  的单性可知  $\phi_1(e) = b$ , 从而  $a = \phi_2(b) = \phi_2\phi_1(e) = 0$ , 证毕.  $\square$

## B Appendix B: $n$ 维球的 $n$ 阶同伦群

我们要证明的结论为:

**Theorem B.0.1.** 给定  $n \in \mathbb{N}^*$ , 则

- (a)  $\pi_q(S^n) \cong 0$  对  $q < n$  成立.
- (b)  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ .

在证明该结论的过程中, 我们会用到如下命题:

**Proposition B.0.2.** 如果  $f, g: S^n \rightarrow S^n$  满足  $\deg f = \deg g$ , 那么  $f \simeq g$ .

这给出了前文例 1.3.9 中同伦不变性的逆命题. 我们先从简单的 (a) 部分说起, 证明是利用微分拓扑:

*Proof.* 根据 Whitney 逼近定理, 我们只需考虑光滑映射  $f$ . 前者是因为 Sard 定理可推广到任意流形上, 对  $f: S^q \rightarrow S^n$  使用 Sard 定理: 由于  $q < n$ , 故所有点都是临界点, 整个  $f(S^q)$  都为临界值. 而临界值在  $S^n$  中零测, 所以  $f$  不是满射. 从而  $f$  可分裂为  $S^q \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$  的映射, 它是零伦的. (严格来说,  $q < n$  的情形和相同维数的 Sard 定理使用的证明方法是不同的, 该问题在之前的笔记中其实是出现过的, 这里就不多说了)  $\square$

接下来我们考虑  $q = n$  的情形<sup>2</sup>, 我们先证明 B.0.2. 证明的关键在于发现  $f: S^n \rightarrow S^n$  所在的同伦类只依赖于其像集的局部性质. 比如说任取  $S^n$  中的一个小开球  $B_r(y_0)$ , 我们可构造一个同伦, 沿连接  $y_0$  与其对径点  $-y_0$  的每个大圆把大圆上的点逐渐向  $y_0$  的对径点收缩, 最终可使  $B_r(y_0)$  外所有点都被推到  $-y_0$  处, 得到新的映射  $\tilde{f}$  满足  $\tilde{f} \simeq f$ . 所以只要  $f(x) \notin B_r(y_0)$ , 那么  $\tilde{f}(x) = -y_0$ , 所以我们如果可取一个  $B$  使得  $f^{-1}(B)$  足够好就能以此来标准化  $f$ .

先用微分拓扑的角度来直观地看这件事: 取  $S^n$  的一个正则点  $y$ , 则  $f^{-1}(y)$  是离散集, 并且可选择开球  $U \ni y$  和  $U_x \ni x$  使得每个  $U_x$  到  $U$  都是同胚. 那么通过上面的操作, 把  $U$  以外的部分都收缩到一点  $*$ , 那么  $\bigcup U_x$  以外的部分就都映为  $*$ .

直观上由于  $U_x$  是两两分离的, 因此把  $S^n$  商掉  $\bigcup U_x$  以外的部分会得到  $|f^{-1}(y)|$  个  $S^n$  的一点并. (此处不严谨, 因为  $U_x$  的形态未必好.) 每个分量的  $S^n$  都同胚到像集中的  $S^n$ , 它被标准化为保定向和反定向的两种同胚. (此处不严谨, 没有说明如何标准化, 但是直观上没有问题) 如果某个分量上的同胚保定向则权重为  $+1$ , 反定向则权重为  $-1$ , 则  $\deg f$  就是这些权重之和. 最后, 如果有两个分量的权重分别为  $+1$  和  $-1$ , 则可通过一个同伦把它们湮灭掉 (同上, 如何进行同伦操作?), 所以  $f$  同伦于一个度数和它相同的标准映射: 它把  $S^n$  先同胚到  $d$  个  $S^n$  的一点并, 然后再把每个分量保定向/反定向 (取决于  $\deg d$  的正负) 投影到单个  $S^n$  上.

<sup>2</sup>我本来打算采用 GTM 82 上的微分拓扑证明, 但它虽然很直观但确实严谨性上有不少欠缺, 于是去找了 GTM 82 上所给的 Whitney 论文的索引.

上面的论述是直观的，但是最大的问题在于每个  $U_x$  未必有好的形态，导致我们很难讨论比如它的边界等性质，也不能严格地建立同伦。但我们发现，在单纯复形中每个单形都是充分好的，并且我们容易去讨论一些“标准形态”，这引导我们考虑映射的单纯逼近。

**Theorem B.0.3 (单纯逼近).** 对两个单纯复形  $K, L$ ，称  $f: K \rightarrow L$  是单纯映射，如果  $f$  把  $K_0$  映到  $L_0$ ，把每个单形  $[e_0 e_1 \dots e_k]$  线性地映到  $[f(e_0) f(e_1) \dots f(e_k)]$ 。

则对任意有限单纯复形之间的连续映射  $f: K \rightarrow L$ ，存在  $K$  的重心剖分  $K'$  和单纯映射  $g: K' \rightarrow L$  使得  $f \simeq g$ 。

单纯映射比胞腔映射的要求还要强（后者相当于只要求  $f(K_n) \subset L_n$ ），线性保证了只要 0 维单形的像确定，整个单纯映射就被完全确定下来，所以它也相当适合作为“标准”映射。其证明却并不困难。

*Proof.* 对每个  $y \in L$ ，记  $\text{St } y$  为所有包含  $y$  的单形构成的闭集（单形  $\Delta_n$  的定义中是自带边界的）， $\text{st } y$  是所有包含  $y$  的单形内部构成的开集。（含有单点集  $\{y\}$ ）则  $\bigcup_{y \in L} f^{-1}(\text{st } y)$  构成  $K$  的一个开覆盖。根据单纯复形的紧性，存在 Lebesgue 数  $\delta$  使得任何大小为  $\delta$  的开球都落在某个  $f^{-1}(\text{st } y)$  中。那么可为  $K$  进行足够细致的重心剖分，使得每个  $\text{St } x$  的直径都小于  $\delta$ 。（需要有限性成立，我们可以借助把单纯复形嵌入在  $|K_0|$  维欧氏空间中定义“距离”），得到重心剖分后的结果  $K'$ 。它满足：

$$\forall x \in K'_0, \exists y \in L_0 \text{ s.t. } f(\text{St } x) \subset \text{st } y. \quad (*)$$

因此我们可构造  $g_0: K'_0 \rightarrow L_0$ ，把  $x$  映为利用上述  $(*)$  所选出的  $y$ 。由于  $f(x) \in \text{st } g(x)$ ，故可找到一条连接  $f(x)$  和  $g(x)$  的直线段（当然也是在欧氏空间的意义上），可沿该线段将每个  $f(x)$  同伦到  $g(x)$  上。

我们首先关心的是：是否每个  $K'$  中单形  $[x_0 \dots x_k]$  的像  $[g(x_0) \dots g(x_k)]$  都是  $L$  中单形？这一点恰好是我们之前选择的星形所保证的。因为如果单形  $[x_0 \dots x_k]$  存在，那么对每个  $x_i$  均有  $[x_0 \dots x_k] \subset \text{St } x_i$ ，于是

$$f([x_0 \dots x_k]) \subset \text{st } g(x_i) \quad \forall 1 \leq i \leq k.$$

所以  $g(x_i)$  的星形交非空，于是存在一个单形包含所有  $g(x_i)$ 。根据单纯复形的构造， $[g(x_0) \dots g(x_k)]$  是该单形的一个  $k$  维面，因此它存在于复形中。上面一段证明可总结为

$$\bigcap_{i=0}^k \text{st } x_i \neq \emptyset \Leftrightarrow [x_0 \dots x_k] \text{ 存在.}$$

从而  $g_0$  的确可延拓为单纯映射  $g: K' \rightarrow L$ ，只需证明  $f \simeq g$ 。追踪任何一个  $x \in K'$  的像：设  $x \in [x_0 \dots x_k]$ ，根据  $f([x_0 \dots x_k]) \subset \bigcap_{i=1}^k \text{st } g(x_i)$ ， $f(x)$  应落在  $L$  中某个以  $[g(x_0) \dots g(x_k)]$  作为面的单形内部。如果  $x = \sum a_i x_i$ ，那么应有  $g(x) = \sum a_i g(x_i) \in [g(x_0) \dots g(x_k)]$ ，于是我们可在这个单形中找到连接  $f(x)$  和

$g(x)$  的直线段（这里用到单形的凸性，这也是一个很好的性质）。构造一个同伦  $h$ ，对每个  $x$  都沿这条线段均匀地从  $f(x)$  走到  $g(x)$ ，容易验证在每个  $x$  附近该同伦都是连续的，证毕。  $\square$

我们可以事先选取  $S^n$  的一个单纯复形结构，记为  $L$ 。对任意  $f, g : L \rightarrow L$ ，根据上面的证明过程可选择足够细致的重心剖分  $K$  使得可同时找到单纯映射  $\phi, \psi : K \rightarrow L$  满足  $\phi \simeq f$ ， $\psi \simeq g$ 。从而我们只需证明，如果两个单纯映射  $\phi, \psi$  映射度相同，那么有  $\phi \simeq \psi$ 。

根据之前所说，我们可选定  $L$  中一个  $n$  维单形  $\sigma$ ，并构造一个从  $\text{id}$  开始的同伦  $h$  使得  $\text{Int}\sigma$  以外的部分都收缩到一点  $*$ 。我们接下来把  $S^n$  等同为  $(\sigma/\partial\sigma, *)$ 。由于  $\phi, \psi$  将单形映为单形，因此  $\phi, \psi$  把一个单形要么线性同胚到  $\sigma$ ，要么送到  $*$ 。特别地，如果一个单形维数小于  $n$ ，那么它一定被送到  $*$ 。

在这种情况下，映射度也很好计算：设  $\tau_1, \dots, \tau_s$  正定向同胚到  $\sigma$ ， $\tau_{s+1}, \dots, \tau_{s+t}$  反定向同胚到  $\sigma$ （单形的定向是明确的，其顶点的一种置换类对应一种定向），那么映射度就是  $s - t$ 。如果  $\phi$  和  $\psi$  的映射度相同，那么它们所对应的  $s - t$  相同，但是具体正反定向单形的个数不同，单形所处的位置可能不同，同种定向具体同胚的方式也可能不同。但在单纯的意义下，这些问题可以严格地一一解决。我们定义三种操作：

操作 1. 设  $\phi : K \rightarrow \sigma/\partial\sigma$ ，并且对某个单形  $\tau$ ， $\phi|_\tau$  给出  $\tau \rightarrow \sigma$  的线性同胚。考虑  $\phi' : K \rightarrow \sigma/\partial\sigma$ ，它在  $\tau$  以外和  $\phi$  等同，在  $\tau$  上给出一个和  $\phi|_\tau$  相同定向的同胚。那么我们把  $\phi$  同伦到  $\phi'$ 。（即定向类完全决定了同伦类）

操作 2. 设  $\phi : K \rightarrow \sigma/\partial\sigma$ ，有两个  $K$  中相邻的单形  $\tau_0, \tau_1$  使得  $\phi|_{\tau_0}$  是到  $\sigma$  的保定向同胚，而  $\phi|_{\tau_1} \equiv *$ 。考虑  $\phi' : K \rightarrow \sigma/\partial\sigma$  在  $\tau_0 \cup \tau_1$  以外和  $\phi$  等同， $\phi'|_{\tau_0} \equiv *$  而  $\phi'|_{\tau_1}$  是到  $\sigma$  的保定向同胚。那么我们把  $\phi$  同伦到  $\phi'$ 。（即非平凡映射可以在单形之间迁移）

操作 3. 设  $\phi : K \rightarrow \sigma/\partial\sigma$ ，有两个  $K$  中相邻的单形  $\tau_0, \tau_1$  使得  $\phi|_{\tau_0}$  是到  $\sigma$  的保定向同胚，而  $\phi|_{\tau_1}$  是到  $\sigma$  的反定向同胚。考虑  $\phi' : K \rightarrow \sigma/\partial\sigma$  在  $\tau_0 \cup \tau_1$  以外和  $\phi$  等同，而  $\phi|_{\tau_0 \cup \tau_1} \equiv *$ 。那么我们把  $\phi$  同伦到  $\phi'$ 。（即正反定向的两个同胚可以抵消）

验证这些操作的良好性：

*Proof.* (1) 相同定向的同胚只不过是差了一个在像上的偶置换。一方面，对单形上的任意三点  $y_i, y_j, y_k$ ，我们可通过在这个面上的旋转（从而带动整个单形进行旋转）给出一个从  $\text{id}$  到 3-cycle  $(y_i, y_j, y_k)$  诱导出的自同胚的同伦，并且这个同伦在每时刻都把  $\partial\sigma$  同胚到  $\partial\sigma$ 。再根据偶置换可写成一些 3-cycle 的复合就可知任何偶置换诱导出的自同胚都和  $\text{id}$  同伦并且每时刻都把边界映到边界。这个像集上的同伦就把  $\phi|_\tau$  送到  $\phi'|_\tau$ ，而且保证了每时刻都有  $\partial\tau \rightarrow \partial\sigma \rightarrow *$ ，从而该同伦是  $\text{rel } \partial\tau$  的，因此它可以常值延拓到整个  $\phi$  上，给出  $\phi$  到  $\phi'$  的同伦。（注意，如果是奇置换，找出的同伦不保边界，就没有这个性质，从而也没法延拓到整个  $\phi$  上：它一定会对周围造成影响）

(2) 设  $\tau_0 = [x_0 x_1 \dots x_n]$ ,  $\tau_1 = [x'_0 x_1 \dots x_n]$ . 考虑  $f, f' : \tau_0 \cup \tau_1 \rightarrow \tau_0$ ,  $f$  把  $\tau_0$  同胚到  $\tau_0$ , 把  $\tau_1$  投影到面  $[x_1 \dots x_n]$  上.  $f'$  把  $\tau_0$  投影到面  $[x_0 \dots x_n]$  上, 把  $\tau_1$  同胚到  $[x_1 x_0 \dots x_n]$ . 则  $f$  和  $f'$  同伦 (我们可以只在  $x_0-x_1-x'_0$  这条“直线”上观察该命题, 然后再把它线性延拓到整个单形上.) 同样将这个同伦 (应该是右复合?) 上  $\phi$ , 则  $\phi|_{\tau_0 \cup \tau_1} \circ h_0 = \phi|_{\tau_0 \cup \tau_1}$  并且  $\phi|_{\tau_0 \cup \tau_1} \circ h_1 = \phi'|_{\tau_0 \cup \tau_1}$ . ( $\tau_0$  和  $\tau_1$  是反定向的,  $h_1$  把  $\tau_1$  打到  $-\tau_0$ , 负负得正, 所以根据步骤 1 在差一个同伦的意义下有该等号关系) 并且整个过程中  $\partial(\tau_0 \cup \tau_1)$  恒被打到  $*$ , 于是该同伦可延拓为  $\phi \simeq \phi'$ .

(3) 我们可以适当使用操作 1, 让  $[x_0 x_1 \dots x_n]$  和  $[x'_0 x_1 \dots x_n]$  都映到  $[y_0 y_1 \dots y_n]$ . 这样每个超平面  $tx_0 + (1-t)[x_1 \dots x_n]$  都和  $tx'_0 + (1-t)[x_1 \dots x_n]$  的像是等同的, 我们容易构造一个同伦使得  $t$  时刻及以后整个  $tx_0 + [1-t][x_1 \dots x_n]$  被映到  $*$ , 这样终时刻整个  $\tau_0 \cup \tau_1$  都被映到  $*$ . 同样地由于整个过程中  $\partial(\tau_0 \cup \tau_1)$  恒被打到  $*$ , 于是该同伦可延拓为  $\phi \simeq \phi'$ .  $\left\langle \begin{smallmatrix} u \\ * \end{smallmatrix} \right\rangle$

最后我们完成整个命题的证明.

*Proof for B.0.2.* 由前文所述, 只需证明两个映射度相同的单纯映射  $\phi, \psi : K \rightarrow \sigma \rightarrow \sigma/\partial\sigma$  是同伦的. 设  $\phi$  和  $\psi$  的映射度都为  $d$ , 不妨设  $d \geq 0$ . 如果  $\phi$  有  $r$  个保定向同胚,  $s$  个反定向同胚, 则  $r - s = d$ . 根据连通性, 可选择一条道路连接一个保定向同胚的单形  $\tau_0$  和一个反定向同胚的单形  $\tau_1$ , 并且路径上的所有单形都被打到  $*$ . 那么可用操作 2 把  $\tau_0$  沿着路径移动到与  $\tau_1$  相邻, 然后再用操作 3 把两个相反定向的映射抵消. 有限次这样的操作后可让  $s$  归零.

对  $\psi$  同样操作之后,  $\phi$  和  $\psi$  就剩下相同个数的保定向同胚. 不断应用操作 2 就可以把  $\phi$  中单形都移动到  $\psi$  中单形所在位置, 最后用操作 1 调整其具体对应形式, 就完全得到了  $\psi$ . 因此,  $\phi \simeq \psi$ , 证毕.  $\left\langle \begin{smallmatrix} u \\ * \end{smallmatrix} \right\rangle$

*Proof for B.0.1.* 我们证明  $\deg : \pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  是群同构. 首先验证映射度是群同态, 即证明  $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$  (注意它和  $\deg(f \circ g) = \deg f \deg g$  的区别). 回忆  $fg$  的定义

$$S^n \xrightarrow{m} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} S^n.$$

两边取同调得到:

$$H_n(S^n) \xrightarrow{m_*} H_n(S^n) \oplus H_n(S^n) \xrightarrow{f_* \oplus g_*} H_n(S^n).$$

选定  $H_n(S^n)$  的一个生成元  $a$ , 直接追踪  $a$  的像可知它被映到  $(a, a)$ , 于是  $(fg)_*(a) = f_*(a) + g_*(a)$ , 所以  $\deg fg = \deg f + \deg g$ . (这个命题用微分拓扑的定义方法也能很容易看到, 因为无非是将两个  $S^n$  分量上一些离散点集上的映射度求和.)

命题 B.0.2 给出了  $\deg$  是单射, 满射性考虑选取  $S^n \rightarrow \bigvee_{i=1}^m S^n \xrightarrow{\pm 1} S^n$ , 如果需求为正就选择  $+1$ , 需求为负就选择  $-1$ . 因此  $\deg$  给出群同构,  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ , 证毕!  $\left\langle \begin{smallmatrix} u \\ * \end{smallmatrix} \right\rangle$