$$\begin{tikzcd}
 & \text{想认真整理笔记} \arrow[dl, "\text{遇到不懂的搜集资料}"'] & \\
\text{发现有趣的东西} \arrow[rr, "\text{非常赞叹于是想学}"'] & & \text{看了 part of 新东西} \arrow[ul, "\text{感觉脑子要炸了}"']
\end{tikzcd}$$

May 同调群之前的章节复习，有些证明参考了 Tom Dieck 以及李思老师 2020 年的讲义.[1]

- Based spaces V.S. Unbased spaces
- Cofibration&Fibration,the change of basement,homotopy sequences
- mapping cylinder and path sapce, loop space and suspension space
- Higher Homotopy Theory
- CW complex and various results on them

0 Basic Conventions

在基础同伦论中出现了很多的特殊空间以及需要研究的范畴，我们在开头总结之：

0.1 Categories

最基础的是拓扑空间范畴 Top：

$$\mathsf{Top}:\begin{cases}\text{Obj: 全体拓扑空间;}\\ \text{Mor: 拓扑空间之间的连续映射.}\end{cases}$$

拓扑空间可以被看作集合赋予一些结构，因此有忘却函子 $\mathcal{F}:\mathsf{Top}\to\mathsf{Set}$. 它是"赋予离散拓扑函子" $\mathcal{D}:\mathsf{Set}\to\mathsf{Top}$ 的右伴随，"赋予平凡拓扑函子" $\mathcal{T}:\mathsf{Set}\to\mathsf{Top}$ 的左伴随.

Top 是完备且余完备的. Top 中的所有范畴论对象都可以通过先对底空间考虑 Set 上的对象，再赋予某种拓扑结构. 比如积对象是笛卡尔积 $\prod X_i$ 赋予乘积拓扑，余积对象是无交并 $\coprod X_i$. $A\xrightarrow{f}X\xleftarrow{g}B$ 诱导出的拉回是 $\{(a,b)\in A\times B: f(a)=g(b)\}$；$A\xleftarrow{f}X\xrightarrow{g}B$ 诱导出的推出是 $A\sqcup B/\{f(x)\sim g(x)\}_{x\in X}$. 但是它们未必具有好的分离性质，这需要我们对好的空间和映射来考虑这些对象.

我们可以定义态射之间的同伦. 同伦的各种**性质**保证了我们可以定义同伦拓扑空间范畴 hTop：

$$\mathsf{hTop}:\begin{cases}\text{Obj: 全体拓扑空间;}\\ \text{Mor: 拓扑空间之间连续映射的}\textbf{同伦等价类}.\end{cases}$$

[1]真的觉得 thu 的很多讲义质量很高，唉.

hTop 作为一个商范畴，有商函子 $h:\mathsf{Top}\to\mathsf{hTop}$ 吧 f 送到其同伦等价类 $[f]$. 我们把 hTop 中同构的对象称为同伦等价的. hTop 不是完备的也不是余完备的.（它不广泛地具有 pullback 和 pushout，但是我们可以定义一种更弱的 homotopy pushout，见 0.3 节）定义 $[X,Y]:=\mathrm{Hom}_{\mathsf{hTop}}(X,Y)$，$\mathsf{hTop}$ 范畴最好的就是 $[X,Y]$ 没有 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$ 那么大，并且有时会附带一些额外结构. 我们可以考虑“在同伦意义下交换”的图表，它就是在 hTop 上的交换图表.

我们可以把映射作为对象，同伦作为态射，在两个拓扑空间 X,Y 上考虑道路范畴 $\mathsf{P}(X,Y)$:

$$\mathsf{P}(X,Y):\begin{cases}\text{Obj: } X \text{ 与 } Y \text{ 之间的连续映射；}\\ \text{Mor: 长度 } \ell\geq 0 \text{ 和长为 } \ell \text{ 的同伦 } f\to g.\end{cases}$$

态射符合会把同伦长度增加。注意这里考虑同伦的长度是为了把 $\mathsf{P}(X,Y)$ 实现为一个范畴，否则将没有逆元. 但是还有更自然的建构：考虑两个同伦 $F,G:f\to g$ 之间的同伦关系，即是一串 $H_t:F\Rightarrow G$ 使得 $H_0=F$, $H_1=G$，并且每个 H_t 都是同伦 $f\Rightarrow g$.（注意在这里类比 f,g 是对象，所以要求同伦每时刻都是 $f\to g$ 的态射）这就得到同伦群胚 $\Pi(X,Y)$：

$$\Pi(X,Y):\begin{cases}\text{Obj: } X \text{ 与 } Y \text{ 之间的连续映射；}\\ \text{Mor: 映射之间同伦的}\textbf{同伦等价类}.\end{cases}$$

我们可以验证这是一个群胚，并记 $[f,g]:=\mathrm{Hom}_{\Pi(X,Y)}(f,g)$. $\Pi(X,Y)$ 的每个连通分支都是一族两两同伦的对象，所以 $\pi_0\big(\Pi(X,Y)\big)=[X,Y]$. 更一般地，$\Pi(\cdot,\cdot)$ 其实能看作函子. 我们首先证明拓扑空间映射能诱导出群胚之间的态射：

$$\mathrm{Hom}(Z,X)\to[\Pi(X,Y)\to\Pi(Z,Y)],\begin{cases}\text{Obj: } [X\xrightarrow{a}Y]\mapsto[Z\xrightarrow{af}Y];\\ \text{Mor: } [a\xrightarrow{\theta}b]\mapsto[af\xrightarrow{\theta\circ(f\times\mathrm{id})}bf].\end{cases}$$

$$\mathrm{Hom}(Y,W)\to[\Pi(X,Y)\to\Pi(X,W)],\begin{cases}\text{Obj: } [X\xrightarrow{a}Y]\mapsto[X\xrightarrow{fa}W];\\ \text{Mor: } [a\xrightarrow{\theta}b]\mapsto[fa\xrightarrow{(f\times\mathrm{id})\circ\theta}fb].\end{cases}$$

前者记为 f^*（因为是反变的），后者记为 f_*（因为是协变的，其实几乎所有上下标都是如此定义） 于是就有下面的：

$$\Pi(\cdot,\cdot):\mathsf{Top}^{\mathrm{op}}\times\mathsf{Top}\to\mathsf{Groupoid},\begin{cases}\text{Obj: } (X,Y)\to\Pi(X,Y);\\ \text{Mor: } [Z\xrightarrow{f}X,\ Y\xrightarrow{g}W]\mapsto f^*g_*.\end{cases}$$

因此我们可以说 Π 是 Hom 函子的某种扩展（也是基本群胚的某种扩展）.

接下来是带基点的拓扑空间范畴 $\mathsf{Top}_\bullet$：

$$\mathsf{Top}_\bullet:\begin{cases}\text{Obj: 全体带基点拓扑空间;}\\ \text{Mor: 保基点的连续映射.}\end{cases}$$

显然有忘却函子 $\mathsf{Top}_\bullet \to \mathsf{Top}$，考虑并上一个单点集的操作 $X \mapsto X \sqcup \{*\} =: X_+$，显然可给出合法的带基点映射 $f_+ : (X_+, *) \to (Y_+, *)$，这给出函子 $(\cdot)_+$ 是忘却函子的左伴随.

代数拓扑中很多建构都有 Top 和 $\mathsf{Top}_\bullet$ 中两种版本，我想人们观察 $\mathsf{Top}_\bullet$ 可能基于如下的考虑：许多我们感兴趣的标准空间（如 S^n）和运算可以在 $\mathsf{Top}_\bullet$ 的某种标准建构下得以实现；同伦群的建构需要基点的选取（$[S^n, X]$ 不是群）；许多代数结构要求单位元的类似物存在，比如如果我们要考虑一个范畴中的群对象，那么就需要选定一个单位 $i : \mathbf{1} \to X$，在拓扑空间中就是 $* \to X$，所以这相当于说选定 X 的基点. 最后，$\mathsf{Top}_\bullet$ 中 $\{*\}$ 是零对象（对任意 $(X,*) \in \mathsf{Top}_\bullet$ 存在唯一的 $\{\star\} \to (X,*)$ 和唯一的 $(X,*) \to \{\star\}$）但 Top 中始对象为 $\varnothing$，终对象为 $\{*\}$，所以在和始对象打交道时 Top 并不好用. 可以说大部分的性质都是在为 S^n 服务（之后会证明它在 $\mathsf{hTop}_\bullet$ 中是一个 cogroup）.

$\mathsf{Top}_\bullet$ 是完备且余完备的，它拥有到 $\mathsf{Set}_\bullet$ 的忘却函子. 其余积对象是 $(\bigvee_i X_i, *)$，即在基点处粘合的无交并（这个余积空间的研究价值就明显比 $X \sqcup Y$ 要强，并且 $*$ 可以视为余积运算的零元），积对象是 $(\prod_i X_i, \prod_i *)$ 即含基点的乘积空间（注意不是记号更对称的 $X \wedge Y$！后者是 tensor object）更多让 $\mathsf{Top}_\bullet$ 发挥作用的对象都会在之后定义.

在 $\mathsf{Top}_\bullet$ 中同伦定义为保基点的同伦. 我们现在用 X 附带一个 $* \to X$ 的映射来理解带基点空间，那么上面的同伦 $H_t : f \to g$ 就满足每时刻

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[rr, "H_t"'] & & Y \end{tikzcd}$$

都交换. 由此可定义同伦带基点拓扑空间范畴 $\mathsf{hTop}_\bullet$，$[X,Y]_\bullet := \mathrm{Hom}_{\mathsf{hTop}_\bullet}(X,Y)$. 我们最熟悉的同伦群就是如此定义的. 依上述的三角形图表观之，我们未必需要同时固定 $* \to X$ 和 $* \to Y$. 比如说只固定 $* \to X$，$* \to Y$ 的变化就昭示是基点变化可能造成的影响.

从图表的角度推广上面的想法，我们可以考虑以 A 为顶空间[2]（space under A）的范畴 Top^A：

$$\mathsf{Top}^A : \begin{cases} \text{Obj: } (X \in \mathsf{Top},\ f \in \mathrm{Hom}(A,X)); \\ \text{Mor: } (X,f) \xrightarrow{a} (Y,g) \text{ s.t. } \begin{tikzcd}[sep=small] & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, "a"] & & Y \end{tikzcd} . \end{cases}$$

在这个范畴下可以自然地考察**收缩**与**形变收缩**. 设 A 是 X 的子空间，$\iota : A \to X$ 是包含映射. 则收缩 r 其实就是 $(X,\iota) \xrightarrow{r} (A, \mathrm{id}_A)$. 我们仍然可以考虑 Top^A 上的同伦，即 $H_t : a \to b$ 满足每个 H_t 都使上面的图表交换，并由此构建出同伦范畴 hTop^A 以及在 Top^A 下同伦等价的对象，并定义 $[X,Y]^A := \mathrm{Hom}_{\mathsf{hTop}^A}(X,Y)$.（这一般要求在上下文中 $A \to X$ 和 $A \to Y$ 自明）现在容易注意到如果 A 是 X 的形变收缩，那么 (X,f)

[2]这是我自己的翻译，我不知道它的中文.

和 (A, id_A) 同伦等价，特别地在忘却函子 $\mathsf{hTop}^A \to \mathsf{hTop}$ 下 A 和 X 也是同伦等价的.

在 Top^A 中，我们更加容易固定一个 f，把 g 也看成变量，并考虑在其变化时是否存在 a 使得图表交换. 这就是拓扑中非常重要的 lifting problem.（想象把 A 看作 X 的子空间，这就是在问何时 g 能延拓到整个 X 上）

与之对应的是以 B 为底空间（space over B）的范畴 Top_B：

$$\mathsf{Top}_B : \begin{cases} \text{Obj: } (X \in \mathsf{Top},\, p \in \mathrm{Hom}(X, B)); \\ \text{Mor: } (X, p) \xrightarrow{a} (Y, q) \text{ s.t. } \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ & {}_p\searrow \quad \swarrow_q & \\ & B & \end{array}. \end{cases}$$

不再重述 hTop_B 和 $[X, Y]_B$ 的定义. 虽然这里的建构和上面只是做了个 opposite，但是我们对它的感觉就不一样了，使用的各种术语的说法也不一样.（当然不仅是感觉，协变和反变在实际运用中差别不小） Top_B 中的对象 $X \xrightarrow{p} B$ 更像是一个**丛**：比如切丛，向量丛，覆叠空间都是非常现成的例子. 我们会更倾向于去考察每个 $b \in B$ 的纤维 $p^{-1}(b)$. 空间 X 被无交地分割为 $\coprod_b p^{-1}(b)$，Top_B 中的映射与同伦也被称为“保纤维的”（fiberwise），它们就像只在每个局部 $p^{-1}(b)$ 上操作然后拼起来一样. 映射 $(B, \mathrm{id}_B) \xrightarrow{s} (X, p)$ 被称为**截面**，因为它相当于从每个纤维 $p^{-1}(b)$ 上选择了一个点. 如果 s 给出了 Top_B 中的一个同伦等价，那么每个纤维 $p^{-1}(b)$ 都可缩到 $s(b)$.

Top_B 的研究完全可以从向量丛和覆叠空间（还有覆叠变换）这两个非常大的实例入手，个人认为对它的讨论会比对 Top^A 的讨论来得更直观.

最后我们还经常研究空间对 (X, A)（A 多实现为 X 的子空间），空间对构成的范畴是 $\mathsf{Top}(2)$.

$$\mathsf{Top}(2) : \begin{cases} \text{Obj: } (A, X \in \mathsf{Top},\, f \in \mathrm{Hom}(A, X)); \\ \text{Mor: } (A \xrightarrow{a} B,\, X \xrightarrow{b} Y) \text{ s.t. } \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & B \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{b} & Y \end{array}. \end{cases}$$

如果 f, g 都是包含映射，那么 $(X, A) \to (Y, B)$ 可以解释为满足 $f(A) \subset B$ 的映射 $f : X \to Y$. 比如在 CW 复形中，我们希望考虑的胞腔映射 $f : X \to Y$ 就满足 $f(X^n) \subset Y^n$，和这里的想法类似. 同样我们可考虑 $\mathsf{hTop}(2)$ 以及 $[(X, A), (Y, B)]$. 拓扑中有许多“相对”建构，一般来说考虑空间对就意味着我们考虑大空间相对于小空间的一些影响.

空间对 (X, A) 还自然地和带基点空间 $(X/A, *)$ 产生联系. 如果我们考虑映射 $f : (X, A) \to (Y, B)$，那么 $X \xrightarrow{f} Y \to Y/B$ 就诱导出 $f' : X/A \to Y/B$ 并且该映射保基点.

最后我们用范畴论中的 Yoneda Lemma 来综观拓扑理论. 对任意范畴 $\mathcal{C}$，我们可以为 $X \in \mathcal{C}$ 考虑 $\mathrm{Hom}(\cdot, X) \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ 以及 $\mathrm{Hom}(X, \cdot) \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Set})$. X 与 $\mathcal{C}$ 中其他对象之间的关系就被包含在函子 $\mathrm{Hom}(\cdot, X)$ 与 $\mathrm{Hom}(X, \cdot)$ 的信息中. 通过

$$\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}), \quad X \mapsto \mathrm{Hom}(\cdot, X)$$

我们可以把 $\mathcal{C}$ 嵌在 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ 中，显然这个嵌入会把不同的对象和不同的态射打到不同的函子和不同的自然变换上. 但有趣的是，这些自然变换已经被态射完全决定了，即 $\mathcal{C}$ 可被嵌入为 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ 的完全子范畴. 如果我们考虑两个函子 $\mathrm{Hom}(\cdot, X)$ 和 $\mathrm{Hom}(\cdot, Y)$ 之间的关系，那么每个 $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ 都能给出函子之间的自然同态 $f_* : \mathrm{Hom}(\cdot, X) \to \mathrm{Hom}(\cdot, Y)$. 另一方面，$X$

Lemma 0.1.1 (Yoneda). *对任意 $F \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$，存在双射*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\cdot, X), F) \xrightarrow{\sim} F(X);$$

$$f_* : [\tau \mapsto (F\tau)(f)] \longleftarrow f,$$

$$(\tau)_{Y \in \mathcal{C}} \longmapsto \tau_X(\mathrm{id}_X).$$

其中选定一个自然变换相当于为每个 Y 选定自然的态射 $\mathrm{Hom}(Y, X) \to F(Y)$，上述的 f_* 对每个 Y 把每个 $\tau \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ 打到了 $(F\tau)(f)$，注意根据反变性 $F\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}}(F(X), F(Y))$.

特别地，取 $F = \mathrm{Hom}(\cdot, Y)$，那么就得到同构

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(\cdot, X), \mathrm{Hom}(\cdot, Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X, Y).$$

写出引理的叙述后证明并不困难. $\mathcal{C}$ 可实现为完全子范畴告诉我们如下的推论：

Corollary 0.1.2. *如果能找到自然同构 $\mathrm{Hom}(\cdot, X) \Rightarrow \mathrm{Hom}(\cdot, Y)$，那么就有对象同构 $X \cong Y$.*

Yoneda 引理的反变形式通过调换箭头可见成立. 现在我们代入拓扑空间的语境，即我们希望通过讨论各种空间到 X 的映射或者在同伦意义下的映射来探测 X 的性质. 如果我们知道所有这些信息，就能够确定出 X 所在的同胚类或者同伦类.

- 同伦群 π_n 就是在 hTop 的语境下考虑 $\mathrm{Hom}(S^n, X)$ 的性态来反推出 X 具有的性质.
- 同调群 H_n 在之后会被证明是可表的：即存在空间 K 使得 $H_n(\cdot) = \mathrm{Hom}(K, \cdot)$.
- Gelfand-Kolmogoroff 定理：如果 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X, \mathbb{R})$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(Y, \mathbb{R})$ 是环同构那么 $X \cong Y$，也就是说 $\mathrm{Hom}(X, \cdot)$ 的很少量的信息就可以被用来读出 X.

Yoneda 引理也让我们可以很放心地完全利用其 Hom 函子的性质来判定其泛性质（因为有时候这会更加简单）. 比如对直积来说，我们只需要找到对象 X 使得有自然同构

$$\mathrm{Hom}(\cdot, X) \simeq \prod_i \mathrm{Hom}(\cdot, X_i)$$

那么就能在同构的意义下唯一确定对象 X. 这种思想在下一节中会有所体现.

0.2 CGWH Space and the Exponential Law

本段对应 May 的第 5 章.[3] 在拓扑中，我们总是把一个同伦 $H : X \times I \to Y$ 看作“一串连续映射”$H_t : X \to Y$. 这样的想法能非常直观地帮助我们理解. 从规范的语言来讲，我们是在考虑如下对应

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X \times I, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(I, \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X, Y)),\ f \mapsto [t \mapsto [x \mapsto f(x,t)]].$$

虽然这种把 I 看成“时间分量”的想法非常自然，但这要求我们把映射空间 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$（它的另一个记号是 Y^X）实现为一个拓扑空间，才可以谈论在时间上的连续性. 点集拓扑课上告诉我们，映射空间上可以赋予紧开拓扑：即以下述集合作为一组拓扑基：

$$\mathcal{U}(K,U) := \{f \mid f(K) \subset U\}.$$

比如我们在考察万有覆叠时用的定端道路空间就可以赋予这样的拓扑成为拓扑空间. 为了区分，我们把赋予了拓扑的映射空间记作 $\mathrm{Map}(X,Y)$. 但是上面的问题仍然没有解决：对一般的空间 $X, Y, Z \in \mathsf{Top}$，

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X \times Y, Z) \not\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(X, \mathrm{Map}(Y,Z)).$$

或者更自然的取值映射

$$X \times \mathrm{Map}(X,Y) \to Y, \quad (x,f) \mapsto f(x)$$

都不一定是连续的，这是我们在考察后续理论时难以接受的！用范畴论的语言来说，Top 不是笛卡尔闭范畴（Cartesian Closed Category）. 回忆在比如在线性空间里，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Vec}}(X,Y)$ 很容易被赋予线性空间结构，从而有

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Vec}}(X \otimes Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Vec}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathsf{Vec}}(Y,Z)).$$

在笛卡尔闭范畴中，张量积函子被指定为通常的笛卡尔积（如果允许选定一般的张量积对象，得到的范畴被称为 Closed Monoidal Category），内同态函子用于把 Hom 集实现为范畴里的一个对象（仅拥有这条性质的范畴被称为闭范畴 Closed Category，与我们更熟悉的幺半范畴 Monoidal Category 相对应） 它们满足上面的自然同构，即“指数律”$Z^{X \times Y} = (Z^X)^Y$.

我们接下来的目标就是找到一个更利于运用的范畴[4]，它能够包含一些足够好的空间（从而不会是平凡而过小的），也不改变连续映射的定义（即取一个完全子范畴）但又在理论上是一个笛卡尔闭范畴，从而可以没有忧虑地享用关于映射空间的种种性质. 与之对应的，可能刚实现这样的建构时则会显得比较怪异，因为它的结果像是对拓扑空间进行了一些很认为的手动修改（比如手动添加一些开集），甚至没法具体读出新

[3] 清华讲义的 Cpt 7 第一次让我大概看懂了这些东西.

[4] 这被称作“a convenient category for Topology”，见 nlab.

建构下的具体拓扑长什么样. 正如 May 书上所说：The importance of which can only become apparent in retrospect.

在正式开始建构之前最后一句话：对 $\mathsf{Top}_\bullet$ 怎么办？前面我们说，在 Top 上我们就把 $X \times Y$ 建构为 X 和 Y 的张量积，但是在 $\mathsf{Top}_\bullet$ 中不是这样. 首先 $\mathrm{Map}_\bullet(Y, Z)$ 当然应该表示从 Y 到 Z 的保基点映射在某种拓扑下构成的空间，其基点为到 $*_Z$ 的常值映射. 所以

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}_\bullet}(X, \mathrm{Map}_\bullet(Y, Z))$$

的意义应当是明确的. 但当我们尝试把它翻译为 $X \times Y \to Z$ 的映射时会发现：X 中基点被映到 $\mathrm{Map}_\bullet(Y, Z)$ 中的常值映射，所以总有 $(*_X, y) \mapsto *_Z$. 其次，X 中任何点都被打到保基点的映射，导致 $(x, *_Y) \mapsto *_Z$. 这导致我们总有 $(* \times Y) \cup (X \times *)$ 被映到基点！因此定义缩积 smash product[5]

$$X \wedge Y := X \times Y/(* \times Y) \cup (X \times *)$$

我们最后会说明

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}_\bullet}(X \wedge Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}_\bullet}(X, \mathrm{Map}_\bullet(Y, Z)).$$

所以定义缩积的真正动机是：它可被实现为 $\mathsf{Top}_\bullet$ 中的 tensor object！所以在把和映射空间有关的讨论从 Top 翻译到 $\mathsf{Top}_\bullet$ 时，会大量地出现 $X \wedge Y$ 就完全不奇怪了.

0.3 More Construction of Spaces

我们再在本节声明一些空间的建构方式，这里大部分都是为了之后的理论做准备.

Definition 0.3.1 (映射柱 Mapping Cylinder). 我们在 Top 范畴下考虑. 对映射 $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$，定义其**映射柱** $Mf \in \mathsf{Top}$ 为

$$Mf := (X \times I) \sqcup Y/((x, 1) \sim f(x)).$$

映射柱可被建构为一个 Top 中的 pushout：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_1} & X \times I \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Mf \end{array}.$$

考虑 Mf 有如下几个原因：

- 在研究同伦延拓性质（HEP）图表时，上述 pushout 图表会自然出现并说明只需验证 Mf 处的测试图表（test diagram）交换，就验证了空间对满足 HEP 性质，这具有很好的理论价值，因为从性质本身来看要对每个拓扑空间都验证图表成立.

---

[5] 我其实真的很好奇为什么“wedge sum”的符号是 $\vee$，而这个缩积的符号是 $\wedge$？

- Mf 可由把**任何**映射 $f: X \to Y$ 分解成 $X \hookrightarrow Mf$ 和 $Mf \xrightarrow{r} Y$ 两步. 容易看到后者是一个形变收缩，之后会证明前者是一个 cofibration. 于是所有映射在差一个同伦等价的意义下都能被看作 cofibration.

- $\mathsf{Top}(2)$ 中的每个空间对 $(X \xrightarrow{f} Y)$ 都可以确定一个 Top 中的对象 Mf，于是我们可以考虑 $\mathsf{Top}(2)$ 中的映射是否有对应物. 考虑图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[d, "b"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd} \qquad (*)$$

考虑 $X \times I \xrightarrow{a\times\mathrm{id}} X' \times I \hookrightarrow Mf', Y \xrightarrow{b} Y' \hookrightarrow Mf'$，根据交换图表可指二者相容，用 pushout 的泛性质给出 $M(a,b): Mf \to Mf'$.（注意如果没有这个 I 直接 identify 是记录不下来 X 处的完整信息的）

因而 M 可视为一个 $\mathsf{Top}(2) \to \mathsf{Top}$ 的函子.

- 除了处理 Top 中的交换图表外，Mf 也能处理 hTop 中的交换图表. 还是上面的图表 $(*)$，只不过在 hTop 上考虑，则图标说的是存在同伦 $\Phi: f'a \Rightarrow bf$. 此时我们可以建立映射：

$$M(a,b,\Phi): Mf \to Mf', \quad \begin{cases} (x,t) \mapsto (a(x), 2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ (x,t) \mapsto \Phi_{2t-1}(x), & \frac{1}{2} \le t \le 1, \\ y \mapsto b(y). \end{cases}$$

直观来说就是把柱的一部分拿来在空间 Y' 上行走，行走之后才能和 b 接上. 注意如果选定不同的同伦 Φ，那么得到的映射是不相同甚至不同伦的（考虑 $X = X' = *, Y = Y' = S^1$，$a = b = \mathrm{id}$，那么可以让基点绕一圈再回到原点，这个同伦和常值同伦给出的常值映射 $M(a,b,\Phi)$ 就不同伦）但是如果两个同伦是同伦的，它们建构出来的映射的确是同伦的. 从这个意义上来讲，虽然 Mf 没法说是从 $\mathsf{hTop}(2)$ 打到 hTop 的函子，但是如果把 $[\Phi] \in \Pi(X, Y')$ 也纳入态射的考虑范围，就可以认为 M 给出了一个函子.

下一个是上述空间的进一步推广.

Definition 0.3.2 (双映射柱 Double Mapping Cylinder). 我们在 Top 范畴下考虑. 给定空间 X, Y, Z 及它们之间的映射 $Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} Z$，定义**双映射柱** $M(f,g) \in \mathsf{Top}$ 为

$$M(f,g) := Y \sqcup (X \times I) \sqcup Z // \big((x,0) \sim f(x);\ (x,1) \sim g(x)\big).$$

它可以被实现为一个 pushout：

$$\begin{tikzcd} X \sqcup X \arrow[r, "\iota_0 \sqcup \iota_1"] \arrow[d, "f \sqcup g"'] & X \times I \arrow[d] \\ Y \sqcup Z \arrow[r] & M(f,g) \end{tikzcd}.$$

双映射柱可以同时保存三个空间及他们之间映射 $Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} Z$ 的关系. 它可以被视为两个映射柱的 pushout（或者说粘合）：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[d, "\iota_0"] & Mf \arrow[d] \\ Mg \arrow[r] & M(f,g) \end{tikzcd}$$

如果有满足相容性的映射 $(a,b,c) : (Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} Z) \to (Y' \xleftarrow{f'} X' \xrightarrow{g'} Z')$ 使下述图表交换

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "a"'] & X \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & Z \arrow[d, "c"'] \\ Y' & X' \arrow[l, "f'"'] \arrow[r, "g'"] & Z \end{tikzcd}$$

我们可得到给出一个映射 $M(a,b,c) : M(f,g) \to M(f',g')$ 来完全概括这件事情. 以及如果上述图表是在同伦意义下交换并且我们有两个同伦 $\Phi : af \Rightarrow f'b$ 和 $\Psi : cg \Rightarrow g'b$，那么可以给出映射 $M(a,b,c,\Phi,\Psi)$，只需要把两个映射柱给出的 $M(b,a,\Phi)$ 和 $M(b,c,\Psi)$ 拼起来即可.

但这样我们的东西就太多了，我们可以让 X, Y, Z 都打到同一个空间 W，并考虑如下同伦意义下交换的图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "a"] \\ Z \arrow[r, "b"] & W \end{tikzcd}.$$

给定同伦 $\Phi : af \simeq bg$，那么可以很自然地定义

$$M(f,g) \to W, \quad \begin{cases} y \mapsto a(y); \\ z \mapsto b(y); \\ (x,t) \mapsto \Phi_t(x) \end{cases}.$$

直观上把 X 看作 Y, Z 的子空间，那么同伦就完美地指示了对每个 X 中的点如何从 Y 的像集走到 Z 的像集内. 所以 $M(f,g)$ 有类似于 pushout 的性质成立，但它不是 hTop 范畴中的 pushout，因为它的建构会和 Φ 的选取相关.

- 如果不事先选取 Φ，那么无法保证 $M(f,g) \to W$ 的唯一性，但是好处是这保证了我们可以完全在 hTop 中考虑问题，也可以把 $M(f,g)$ 更换成与它同伦等价（hTop 中同构）的空间.

- 如果确定 $\Phi : af \simeq bg$，那么存在唯一的 $M(f,g) \to W$ 和 $\Psi : X \times I \to W$ 使得图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "a"] \arrow[dl, Rightarrow, "\Phi"'] \arrow[ddr, bend left] & \\ Z \arrow[r, "b"] \arrow[drr, bend right] & M(f,g) \arrow[dr, dashed] & \\ & & W \end{tikzcd}$$

两个三角形都严格交换，Ψ_0 和 Ψ_1 分别是 $X \to Y \to W$ 和 $X \to Z \to W$，并且

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi_t"] \arrow[dr, "\Psi_t"'] & M(f,g) \arrow[d, dashed] \\ & W \end{tikzcd}.$$

- 如果一个同伦交换图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "a"] \\ Z \arrow[r, "b"] & W \end{tikzcd}$$

所诱导出的 $M(f,g) \to W$ 是同伦等价，那么称 W 是一个 $Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} Z$ 的**同伦推出**（homotopy pushout），把图表称为同伦推出图表. 严格来说这是 weak pushout，即不具有唯一性质.

- 注意：Top 中的 pushout 不一定是 homotopy pushout，我们需要 X 能够较好地打入空间 Y 或者空间 Z 中，才能给出 $M(f,g)$ 和 $Y \sqcup Z/(f(x) \sim g(x))$ 之间的同伦等价. $Y \sqcup Z/(f(x) \sim g(x))$ 根本无法实现为 $M(f,g)$ 的子空间（与之对应地，Y 可以被实现为 Mf 的子空间）所以没法很直观地通过把 $X \times I$ 收缩到 X 来给出同伦等价.

Example 0.3.3 ($\mathsf{hTop}_\bullet$ 可能没有 pushout). 考虑 $S^1 \xleftarrow{2} S^1 \to D^2$，其中 $S^1 \xrightarrow{2} S^1$ 表示映射 $z \mapsto z^2$. 如果它在 $\mathsf{hTop}_\bullet$ 中存在 pushout，记该空间为 W.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] \arrow[d, "2"'] & D^2 \arrow[d] \\ S^1 \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

由泛性质观之：W 满足对任意空间 X，满足图表 $\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] \arrow[d, "2"'] & D^2 \arrow[d] \\ S^1 \arrow[r, "a"] & X \end{tikzcd}$ 的映射同伦类可与 $[W,X]_\bullet$ 建立双射. 但前者很明显是

$$\{a \in [S^1, X]_\bullet : a^2 = 1\}$$

即 $\pi_1(X)$ 中挠为 2 的因子. 问题转化为考虑是否存在空间 W 使得对任意空间 X 均有 $[W,X]_\bullet \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \pi_1(X))$. 我们来证明不存在：考虑下述两个和 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 有关的纤维丛：

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to S^3 \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R});$$
$$S^1 \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \to S^2.$$

前者把 S^3 看作 $\mathbb{H}^1$ 中的单位球，它和 SO_3 有 2-to-1 对应；后者就是把 SO_3 作用在 S^2 上，固定一个 S^2 中的向量，其稳定化子为 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cong S^1$. 第一个式子中 S^3 是单

连通的，这立即给出 $\pi_1(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}))\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 对第二个式子在 W 处应用 fiber sequence 可知

$$[W,S^1]_\bullet\to[W,\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})]_\bullet\to[W,S^2]_\bullet$$

正合，而 $\pi_1(S^1)\cong\mathbb{Z}$，$\pi_1(S^2)\cong 0$，所以上式其实是 $0\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to 0$，这不可能正合，矛盾！所以满足要求的空间 W 不存在. 上面的构造其实表达了比单纯论证 pushout 不存在更多的观点！

还有很多用很基本的空间就能给出的构造，我们可以用类似的手段证明不带基点的空间 hTop 上也是不一定有 pushout 的（可能得去讨论 π_2，因为我们希望空间单连通从而 $[W,X]_\bullet\cong[W,X]$）

下面我们进入 $\mathsf{Top}_\bullet$ 范畴，有很多空间都具有“粘合 $*\times I$”的操作，这大多都是考虑**带基点同伦**所致的：

Definition 0.3.4 (约化柱 reduced cylinder). 在范畴 $\mathsf{Top}_\bullet$ 下考虑. 称空间 $(X,*)$ 的**约化柱**为 $X\wedge I_+=X\times I/*\times I$，其基点就是 $*\times I$ 等同所得点.

很明显一个从 $(X,*)$ 到 $(Y,*)$ 的带基点同伦 h 就等价于保基点映射 $h:X\wedge I_+\to Y$，于是在 $\mathsf{Top}_\bullet$ 中我们应当用 $X\wedge I_+$ 来代替 $X\times I$ 的地位，从而如下的定义也是合理的.

Definition 0.3.5 (约化映射柱 reduced mapping cylinder). 在范畴 $\mathsf{Top}_\bullet$ 下考虑. 称映射 $(X,*)\xrightarrow{f}(Y,*)$ 的**约化映射柱**为

$$\widetilde{M}f:=(X\wedge I_+)\vee Y/(x\sim f(x)).$$

它可以实现为如下 $\mathsf{Top}_\bullet$ 中的 pushout：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_1} & X\wedge I_+ \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y & \longrightarrow & \widetilde{M}f \end{array}.$$

类似地可定义约化双映射柱 $\widetilde{M}(f,g)$.

$\widetilde{M}f$ 和 Mf 之间的关系只是把 $*\times I$ 等同，也就是把同伦换成带基点同伦. 这样我们可以把之前在 Top 上对 Mf 的讨论照搬到 $\mathsf{Top}_\bullet$ 上对 $\widetilde{M}f$ 的讨论.

在 $\mathsf{Top}_\bullet$ 中我们得以讨论典范的基点映射 $f:X\to Y,\,x\mapsto *$（它也典范地成为映射空间的基点）到基点映射的同伦可自然引出下述概念：

Definition 0.3.6 (（约化）锥空间 (reduced) cone). 对空间 $X\in\mathsf{Top}$，定义其**锥空间**为

$$CX:=X\times I/(X\times\{1\}).$$

对空间 $X \in \mathsf{Top}_\bullet$，定义其**约化锥空间**为

$$\widetilde{C}X := X \wedge I_+/(X \times \{1\}).$$

我们这里不妨假定了 I 的基点是 1，有时可能用的是 0. 它们分别可被实现为下述 pushout：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_1} & X \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & Cf \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_1} & X \wedge I_+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \widetilde{C}f \end{array}$$

从而它们也可以被看作是特殊的映射柱. CX 和 $\widetilde{C}X$ 都具有自然的基点.

X 可以典范地嵌入到锥空间中. 从映射群胚的角度来看，$\Pi(X,Y)$ 中的一个从 f 到基点映射的同伦就可以表示为 $F : \widetilde{C}X \to Y$，两个同伦之间的同伦则是 $\theta : F \to G \text{ rel } X$. 再考虑非约化的情形，如果一个映射 $f : X \to Y$ 同伦于任何一个常值映射，那么就可以把 f 延拓为一个从 X 的锥到 Y 的映射 $CX \to Y$. 特别地当 X 可缩时任何映射都可以被延拓到 CX 上.

在 Top 上，任何映射 $f : X \to Y$ 都可以给出唯一的 $C(f) : CX \to CY$（似乎得和后面的 Cf 区分开），并且 CX 是有典范基点的，这样就把 C 建构为了一个 $\mathsf{Top} \to \mathsf{Top}_\bullet$ 的函子. 考虑 CX 的另一个好处是很多时候 CX 的建构比 $\widetilde{C}X$ 更自然，比如 $CS^n \cong D^{n+1}$，只有在必须考虑基点的影响时我们会多采用 $\widetilde{C}X$.

最后，CX 和 $\widetilde{C}X$ 之间可以做下述转化：如果我们施加 $(\cdot)_+$ 把 X 变为 X_+，那么 $CX \cong \widetilde{C}X_+$. 这样如果一个理论在使用 reduced cone 时成立，那么我们通过把 Top 通过函子 $(\cdot)_+$ 嵌入在 $\mathsf{Top}_\bullet$ 中就能获得一套使用 cone 的理论成立.（注意不是所有建构都满足这个要求，比如 X_+ 的 reduced cylinder 就是 $(X \times I)_+$）

上面两个想法结合起来就可以得到映射锥的概念：

Definition 0.3.7 (（约化）映射锥 (reduced) mapping cone). 在 Top 中考虑 $f : X \to Y$，定义其**映射锥**为

$$Cf := CX \sqcup Y/((x,0) \sim f(x)) = Mf/(X \times \{1\}) = M(f, [X \to *]).$$

它可以被实现为下述 pushout：

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{\iota_0 \sqcup \iota_1} & X \times I \\ {\scriptstyle f \sqcup \text{ const}} \downarrow & & \downarrow \\ Y \sqcup * & \longrightarrow & Cf \end{array}.$$

在 $\mathsf{Top}_\bullet$ 中考虑 $f : (X,*) \to (Y,*)$，定义其**约化映射锥**为

$$\widetilde{C}f := \widetilde{C}X \sqcup Y/((x,0) \sim f(x)) = \widetilde{M}f/(X \times \{1\}) = \widetilde{M}(f, [X \to *]).$$

它可以被实现为下述 pushout：

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{\iota_0 \sqcup \iota_1} & X \wedge I_+ \\ {\scriptstyle f \sqcup \text{ const}} \downarrow & & \downarrow \\ Y \sqcup * & \longrightarrow & \widetilde{C}f \end{array}.$$

Cf 和 $\widetilde{C}f$ 都具有典范的基点.

研究映射锥最直观的还是考虑子空间对 $A \subset X$ 和包含映射 $\iota: A \to X$ 所给出的 $C\iota$，于是我们相当于在大的底空间 X 上"筑起"了一个以 A 为底的锥. 那么 A 的这部分在同伦的意义下就 reduce 为一点. 从这个角度来看，$C\iota$ 和 X/A 是有关系的，只不过当 A 是任意空间时，X/A 直接把 A 缩为一点不一定有好的拓扑性质（比如分离性），但是黏上一个锥这个操作对大部分 (A, X) 都是好的，之后会证明在 ι 是余纤维化时两个空间的确是同伦等价的. 但即便不是，我们也可以在同伦的意义下想象 $C\iota$ 具有明显的"消去 A 部分"的意味.

然后我们再从双映射柱的角度来考察一下 Cf. 虽然我们的考察对象是 $* \leftarrow A \xrightarrow{f} X$，但是由于映射 $A \to *$ 总是平凡的，我们可以忽略这部分资料，把 C 看作一个 $\mathsf{Top}(2) \to \mathsf{Top}_\bullet$ 的函子，具体建构方法和双映射柱相同.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \rightsquigarrow (Cf \overset{M(*,a,b)}{\longrightarrow} Cg).$$

此外我们还有自然的函子 $D: \mathsf{Top}_\bullet \to \mathsf{Top}(2)$，$(X, *) \to (* \hookrightarrow X)$. 在我们考虑同调理论时，这两个函子可以在"约化同调理论"和"相对同调理论"之间转化. 如果有一个好的约化同调理论，我们就可以复合函子 D 使其变为相对同调理论，反之亦然. 我们考虑函子 CD 和 DC：

$$DC: \mathsf{Top}(2) \to \mathsf{Top}(2), \quad (X, A) \mapsto (Cf, *).$$

$$CD: \mathsf{Top}_\bullet \to \mathsf{Top}_\bullet, \quad (X, *) \mapsto (X \vee I, *).$$

之后会证明在有 excision property 时前者是好的函子，有 well-pointed property 时后者是好的函子，这两件事情在同调理论中均得以满足，这样映射锥就和"相对性"拥有很大的联系了.

双映射柱具有同伦弱推出性质，所以如果有下述同伦意义下的图表

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ * & \longrightarrow & Y \end{array}$$

则存在 $Cf \to Y$ 使得 $[X \hookrightarrow Cf \to Y] = [X \xrightarrow{g} Y]$. 还是把 A 想象成 X 的子空间，那么上面图表说的是如果有一映射 $g: X \to Y$ 使得 $g|_A$ 同伦于常值映射，那么就可以给出一个 $Cf \to Y$. 我们换成 hTop 中的语言：f 可诱导出 $f^*: [X, Y] \to [A, Y]$，如果 $f^*(g)$ 平凡（即落在常值映射的等价类中，不妨设 Y 道路连通），那么存在 $h \in [Cf, Y]$ 使得 $i: X \hookrightarrow Cf$ 诱导出的 $i^*: [Cf, Y] \to [X, Y]$ 满足 $i^*h = g$.

我们当然看到在 $\mathsf{Top}_\bullet$ 下讨论这件事更自然（一方面图表中其实已经给出 Y 的基点，另一方面 $[A, Y]_\bullet$ 具有不依赖于道路连通性的典范的基点，最后 $[A, Y]_\bullet$ 比 $[A, Y]$ 更容易被赋予高于 Set 的代数结构） 上面的讨论可以化归为一句话：

$$[\widetilde{C}f, Y]_\bullet \xrightarrow{i^*} [X, Y]_\bullet \xrightarrow{f^*} [A, Y]_\bullet \text{ 是正合列.}$$

集合正合列中，$\ker f$ 被定义为 $f^{-1}(*)$，于是我们有 $\ker f^* = \operatorname{im} i^*$. 基于这样的原因，$Cf$ 也被称为映射 $X \to Y$ 的**同伦余纤维**（homotopy cofiber），并且再次验证了我们之前说 Cf 有在 X 中消去 A 部分的想法.

我们之前考虑了从任意 f 到 $[X \to *]$ 的定端同伦给出 $\widetilde{C}X$，更特殊地我们可以考虑 $[X \to *]$ 到自身的同伦，这会给出如下的定义.

Definition 0.3.8 (（约化）双角锥 (reduced) suspension). 在 Top 中，定义空间 X 的**双角锥**为

$$\begin{aligned} SX &:= (X \times I)/(X \times \{0\}, X \times \{1\}) = M([X \to *], [X \to *]) = CX/X \\ &= CX \sqcup CX/(x_1 \sim x_2) = Cf/Y. \end{aligned}$$

在 $\mathsf{Top}_\bullet$ 中，定义空间 X 的**约化双角锥**为

$$\begin{aligned} \Sigma X &:= (X \times I)/\big((X \times \{0,1\}) \cup (* \times I)\big) = \widetilde{M}([X \to *], [X \to *]) = \widetilde{C}X/X \\ &= (X \times S^1)/\big((X \times \{0\}) \cup (* \times S^1)\big) = X \wedge S^1 = \widetilde{C}X \sqcup \widetilde{C}X/(x_1 \sim x_2) = \widetilde{C}f/Y. \end{aligned}$$

ΣX 有典范的基点，SX **没有**典范的基点.

上面列举了一些比较常用的定义. 我们之前说过 $\widetilde{C}X_+ \cong CX$，但是 SX 和 ΣX_+ 之间的差距是弥补不了的. 如果我们考虑 ΣX_+，会发现它把 $X \times \{0\}$ 和 $X \times \{1\}$ 都等同到一个点上了，所以和 SX 不相同；即使基点的嵌入比较好，也只能得到 $\Sigma X_+ \simeq SX \vee S^1$（试想把 S^2 的一组对径点粘合在一起） 但是如果基点的嵌入足够好（$* \to X$ 是 cofibration），我们会得到 $SX \simeq \Sigma X$. 比如说 $S(S^1)$ 和 ΣS^1 都会得到 S^2，但是前者的观点很几何，相当于我们拼上两个 2-cell，后者如果采用 $S^1 \wedge S^1$ 的看法的话，通过 $(I/\partial I) \wedge (I/\partial I) = I^2/\partial I^2$ 去看些许是最自然的方式.（因为后一种看法自然提供了基点.）

双角锥在不少理论中都有很大的作用，这件事可能在只拿到它的（某个）定义时会感觉很奇怪. 其中一个原因可能是很多建构最后都会导致双角锥出现（正如很多建构都能出现标准球）. 不过从理论上来说，可能最有趣的一件事情是：

Proposition 0.3.9. 对任意拓扑空间 $X \in \mathsf{Top}_\bullet$，$\Sigma X$ 是范畴 $\mathsf{Top}_\bullet$ 中的**余群**对象（cogroup）.

我们先看群结构怎么和 ΣX 扯上关系. 考虑带基点映射群胚 $\Pi_\bullet(X, Y)$，为了方便下面直接把基点 $[X \to *]$ 记为 $\star$. 则考虑从 $\star$ 到 $\star$ 的保基点同伦相当于考虑 $\Sigma X \to Y$，考虑两个同伦之间的定端同伦相当于考虑两个映射 $\Sigma X \to Y$ 之间的保基点同伦.（注意由于两端都是常值映射 $\star$，所以“定端同伦”的限制可以被简单地表述为“保基点”.） 于是我们有：

$$[\Sigma X, Y]_\bullet \cong \mathrm{Hom}_{\Pi_\bullet(X,Y)}(\star). \tag{1}$$

根据群胚的性质，后者是一个群，所以前者可以被赋予群结构. 采用 $\Sigma X = X \wedge S^1$ 的记号，具体的群结构可被描述为：

$$(f,g) \mapsto fg, \quad (fg)(x \wedge t) = \begin{cases} f(x \wedge 2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}; \\ g(x \wedge 2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

其中 $x \wedge 0$ 和 $x \wedge 1$ 都是基点保证了该定义是良好的. 另一方面，任何映射 $f \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$ 可诱导出群胚之间的函子 $f_* : \Pi_\bullet(X,Y) \to \Pi_\bullet(X,Z)$，并且保基点性保证了它会把 $\star_Y$ 送到 $\star_Z$. 所以 $f_\star$ 给出 $\mathrm{Hom}_{\Pi_\bullet(X,Y)}(\star) \to \mathrm{Hom}_{\Pi_\bullet(X,Z)}(\star)$ 的群同态. 这个 f^* 在 (1) 下恰好对应于 $\mathsf{hTop}_\bullet$ 中的

$$f_* : [\Sigma X, Y]_\bullet \to [\Sigma, Z]_\bullet.$$

于是 f_* 被升级为群同态. 现在根据范畴的观点来看，函子 $[\Sigma X, \cdot]_\bullet$ 可被升级为 $\mathsf{hTop}_\bullet \to \mathsf{Grp}$ 的函子. 特别地，当 $n \ge 1$ 时 $S^n = \Sigma^n S^0$，于是 $[S^n, \cdot]_\bullet$ 是 $\mathsf{hTop}_\bullet \to \mathsf{Grp}$ 的函子，与我们的认知相符.

以 Yoneda 视角来看，$X \mapsto [X, \cdot]_\bullet$ 是 $\mathsf{hTop}_\bullet^{\mathrm{op}}$ 到函子范畴的嵌入，于是 ΣX 本身在范畴 $\mathsf{hTop}_\bullet^{\mathrm{op}}$ 上应被视为某种群对象. 事实上上面 fg 的建构也提示了我们这一点：它是先在 ΣX 上做了一些操作再打到 Y 上的，所以可化归为关于 ΣX 本身的性质：

$$fg : X \wedge S^1 \xrightarrow{\sim} X \wedge (S^1 \vee S^1) \xrightarrow{\sim} (X \wedge S^1) \vee (X \wedge S^1) \xrightarrow{f \vee g} Y.$$

于是可以摘取同胚 $m : \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X$（甚至可以说这个结构只和 S^1 的性质有关）在 $\mathsf{hTop}_\bullet^{\mathrm{op}}$ 下就可被视为 $\Sigma X \times^{\mathrm{op}} \Sigma X \to \Sigma X$ 的映射.（余积对象的泛性质转换箭头后就变成积对象）这就是我们想要的群运算. 我们正式引入群对象和余群对象的定义：

Definition 0.3.10 (（余）群对象 (co)group object[6]). 以下取 $\mathcal{C}$ 为范畴, 并假设 $\mathcal{C}$ 具备有限积; 特别地, $\mathcal{C}$ 中有一个择定的终对象 $\mathbf{1}$, 亦即空积.

范畴 $\mathcal{C}$ 中的**群对象**系指一族资料 (G, m, i, e), 其中

- G 是 $\mathcal{C}$ 的对象,
- $m : G \times G \to G$ (乘法), $i : G \to G$ (取逆) 及 $e : \mathbf{1} \to G$ (幺元) 是 $\mathcal{C}$ 中的态射,

满足下列条件:

结合律 在 $\mathcal{C}$ 中有交换图表

$$\begin{tikzcd} G \times (G \times G) \arrow[rr, no head, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times m"'] & & (G \times G) \times G \arrow[d, "m \times \mathrm{id}_G"] \\ G \times G \arrow[r, "m"'] & G & G \times G \arrow[l, "m"] \end{tikzcd}$$

其中的无名同构 $G \times (G \times G) \simeq (G \times G) \times G$ 是积的结合约束.

[6]照抄自李文威《代数学方法》4.11 节.

幺元性质 同样利用结合约束 (空积情形), 我们要求下图交换

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_G"] & \\
\mathbf{1}\times G \arrow[dr, "m\circ(e\times\mathrm{id}_G)"'] & & G\times\mathbf{1} \arrow[dl, "m\circ(\mathrm{id}_G\times e)"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

逆元性质 下图交换

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "(\mathrm{id}_G{,}i)"'] \arrow[d] \arrow[dr, "(i{,}\mathrm{id}_G)"] & \\
G\times G \arrow[dr, "m"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "e"] & G\times G \arrow[dl, "m"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

我们经常省去群对象中的 (m,i,e). 群对象 G_1, G_2 之间的**同态**是指保持 m, i, e 的态射 $\varphi : G_1 \to G_2$, 这相当于说以下图表交换:

$$\begin{tikzcd}
G_1\times G_1 \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi"] \\
G_2\times G_2 \arrow[r, "m_2"'] & G_2
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi"] \\
G_2 \arrow[r, "i_2"'] & G_2
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
& \mathbf{1} \arrow[dl, "e_1"'] \arrow[dr, "e_2"] & \\
G_1 \arrow[rr, "\varphi"'] & & G_2
\end{tikzcd}$$

据此可以定义群对象的同构, 自同构等概念. 如果合成态射 $G\times G \xrightarrow{\text{置换}} G\times G \xrightarrow{m} G$ 等于 $G\times G \xrightarrow{m} G$, 则称 G 为**交换**的.

只满足乘法和幺元性质的对象被称为**幺半群对象**（monoid object）. 把所有箭头反向，所有积对象替换成余积对象就得到范畴 $\mathcal{C}$ 中的**余积对象**，或者说 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中的积对象.

显然代入 $\mathcal{C}=\mathsf{Set}$ 就回到群的定义. 接下来我们代入 $\mathcal{C}=\mathsf{hTop}_\bullet^{\mathrm{op}}$，则 $\mathbf{1}=*$，$e : X \to *$ 是平凡的“缩合”, $m : G \to G\vee G$ 为“分裂”，$i : G \to G$ 为“翻转”. 我们自然语言讲述每条性质说明了什么.

- 结合律：G 先进行一步分裂为 $G\vee G$. 则将第一个 G 再分裂与将第二个 G 再分裂这两种操作是同伦的.
- 幺元性质：将 G 分裂为 $G\vee G$，再把某个分量 G 缩为一点的操作同伦于 id_G.
- 逆元性质：将 G 分裂为 $G\vee G$，把某个分量进行一次翻转，再把它们叠起来拍扁到 G 上所得操作是零伦的.
- 交换律：将 G 分裂为 $G\vee G$ 和将 G 分裂为 $G\vee G$ 后把两个分量交换这两种操作是同伦的.

我们可以非常几何地想象前三条性质对 $G=S^1$ 和 $G=S^2$ 成立. 对 $G=S^1$，我们可以直接想象将基点的对径点粘合到基点上就可以给出所需的映射 $S^1\to S^1\vee S^1$. 对 S^2 虽然我们也可以类似地把一个赤道圆缩为一点，但是这样坐标系统就会比较乱，比较难想象拍扁映射 $S^2\vee S^2\to S^2$. 一个解决方法是把 S^n 看作 $I^n/\partial I^n$，然后

定义 $S^2 \to S^2 \vee S^2$ 是把正方形在一条中线处切断为两个长方形，然后把两侧分别同胚为 I^2，再把边界等同到一点 $*$. 用这种方法很容易把每个点的去向给写出来. 比如说逆元性质，就是把正方形撕成两半，其中一半翻折过后重叠在另一半上面，这样给出的映射当然零伦.

对一般的 ΣX，我们只列出它作为余群对象所选定的资料 m, i，就不再仔细验证了:

$$
\begin{aligned}
m :& \Sigma X \tilde{\to} \Sigma X \vee \Sigma X, \quad x \wedge t \mapsto \begin{cases} (x \wedge 2t)_1, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ (x \wedge (2t-1))_2, & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases} \\
i :& \Sigma X \tilde{\to} \Sigma X, \quad x \wedge t \mapsto x \wedge (-t).
\end{aligned}
$$

对更一般的范畴来说，研究（余）群对象太过抽象. 我们已经更直观地证明了 $[\Sigma X, \cdot]$ 是 $\mathsf{hTop}_\bullet \to \mathsf{Grp}$ 的函子，实际上可以证明两者的等价性.

Proposition 0.3.11. *对任意范畴 $\mathcal{C}$，X 是 $\mathcal{C}$ 中的群对象当且仅当 $\mathrm{Hom}(\cdot, X)$ 是群函子 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Grp}$. X 是 $\mathcal{C}$ 中的余群对象当且仅当 $\mathrm{Hom}(X, \cdot)$ 是**群函子** $\mathcal{C} \to \mathsf{Grp}$.（严格意义上来说，“群函子”包含的资料包括了函子 $G : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$ 和为每个 $G(X)$ 赋予的群结构，使得每个 $G(f)$ 都是群同态）*

Proof. 我们只需证明前者，记 $\mathcal{C}^\wedge = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$，根据 Yoneda 嵌入，可以通过 $X \mapsto \mathrm{Hom}(\cdot, X)$ 把 $\mathcal{C}$ 实现为 $\mathcal{C}^\wedge$ 的完全子范畴. 这样把群对象所满足的所有图表都施加这个函子，根据 $\mathrm{Hom}(\cdot, X \times Y) = \mathrm{Hom}(\cdot, X) \times \mathrm{Hom}(\cdot, Y)$ 可知所有有限直积都能被拆开（比如 m 说的就是 $\mathrm{Hom}(\cdot, X) \times \mathrm{Hom}(\cdot, X) \to \mathrm{Hom}(\cdot, X)$）从而

- $X \mapsto \mathrm{Hom}(\cdot, X)$ 把 $\mathcal{C}$ 中群对象映为 $\mathcal{C}^\wedge$ 中的群对象.

G 是 $\mathcal{C}^\wedge$ 中的群对象当且仅当存在自然变换 $m : G \times G \to G$，$i : G \to G$ 和 $e : \mathbf{1} \to G$ 满足各种相容性条件. 关键在于自然变换是逐点定义的，自然变换满足某个交换图表等价于说它们在每个对象上取值都满足交换图表，并且在不同对象上取值时诱导出的交换图表之间满足自然性. 我们涉及到的定义都只关于函子 G 及其直积，同样地，我们可以把每个直积拆开，比如把 $(G \times (G \times G))(Y)$ 打开为 $G(Y) \times (G(Y) \times G(Y))$. 这样每个 $G(Y)$ 都是群对象，且每个 $f : Y \to Z$ 都能诱导出 $G(Z) \to G(Y)$ 的群同态，而每个 $G(Y)$ 又都定义在 Set 上. 这恰好给出群函子的定义，并且整个逻辑逆推也是成立的，故我们证明了：

- $\mathcal{C}$ 中的群函子完全等同于 $\mathcal{C}^\wedge$ 中的群对象.

上面两件事直接说明了对每个群对象 X，$\mathrm{Hom}(\cdot, X)$ 是群函子. 另一方面，如果 $\mathrm{Hom}(\cdot, X)$ 是群函子，那么它也是 $\mathcal{C}^\wedge$ 中的群对象. 根据 Yoneda 嵌入的全忠实性和保直积性，验证 $\mathrm{Hom}(\cdot, X)$ 是群对象的所有交换图表中的所有对象都落在 $\mathcal{C}$ 的像中，所有态射都可在 $\mathcal{C}$ 中找到对应物，因此可以把整个图表都照搬到 $\mathcal{C}$ 上，这就证明了 X 是群对象，所以两者是等价的.

最后我们证明 $\Sigma^2 X$ 可以被实现为 Abel 群对象，只需证明每个 $[\Sigma^2 X, Y]$ 都是 Abel 群. 证明比较技术化：首先在 $\Sigma^2 X$ 中我们有两种可行的乘法，分别为

$$f * g : x \wedge t \wedge s \mapsto \begin{cases} f(x \wedge 2t \wedge s), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x \wedge 2t - 1 \wedge s), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases},$$

$$f \star g : x \wedge t \wedge s \mapsto \begin{cases} f(x \wedge t \wedge 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ g(x \wedge t \wedge 2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

我们可以想象每个 x 对应一个 $I^2/\partial I^2$，$*$ 让左半区按 f 映，右半区按 g 映；而 $\star$ 让下半区按 f 映，上半区按 g 映. 这两种运算有一个明显的交换关系：

$$(LD * RD) \star (LU * RU) = (LD \star LU) * (RD \star RU).$$

其中 LD, RD, LU, RU 分别代表四个映射，它的标记就代表他最终会作用于 $I^2/\partial I^2$ 的哪块区域上（比如 LU 就是左上区域）. 接下来就用这个信息，我们来证明这两种群运算相同并且可交换.

首先设 $*$ 运算的单位元是 1_*，$\star$ 运算的单位元是 $1_\star$. 那么

$$(1_* * 1_\star) \star (1_\star * 1_*) = (1_* \star 1_\star) * (1_\star \star 1_*).$$

LHS 是 $1_\star$，RHS 是 1_*，所以 $1_\star = 1_*$，把它们都记为 1. 再证明两个运算相同：

$$(a * 1) \star (1 * b) = (a \star 1) * (1 \star b).$$

所以 $a \star b = a * b$，把两个运算都记为 $\cdot$. 最后验证交换性：

$$(1 \cdot a) \cdot (b \cdot 1) = (1 \cdot b) \cdot (a \cdot 1).$$

所以 $a \cdot b = b \cdot a$. 至此完成了证明. Abel 群之间的群同态就是 Abel 群同态，所以 $\Sigma^2 X$ 是 Abel 群对象，特别地，$S^n\,(n \geq 2)$ 都是 Abel 群对象，$\pi_n\,(n \geq 2)$ 均是交换群.[7]

上面的所有空间都存在 fibration 下的对偶建构，这里暂且跳过.

最后我们来总结一下那些和标准球和标准圆盘相关的空间.

Definition 0.3.12. 一个标准的 n 维圆盘 D^n 定义为

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}.$$

常用的与它同胚的空间有：标准 n 维立方体

$$I^n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1\}.$$

标准 n 维单形

$$\triangle^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq x_i \leq 1, \sum_i x_i = 1\}.$$

[7]这个问题我还没有完全想明白，因为我直接在对象 $\Sigma^2 X$ 上操作好像证不出相同的事情，不知道为什么.

它们显然是同胚的. 更关键的是下面对球的不同建构：

Definition 0.3.13. 一个标准的 n 维球定义在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中，定义为

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}.$$

S^n 还有如下一些同胚的建构：

$$I^n/\partial I^n,\ D^n/\partial S^{n-1},\ \Sigma S^{n-1},\ CS^{n-1}/S^{n-1}, CS^{n-1} \sqcup_{S^{n-1}} D^n.$$

1 Cofibration

1.1 Definition and basic properties

本节对应 May 5.1，5.2 节. 余纤维化的定义来源于 lifting problem:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

将 A 视作 X 的子空间，那么上面的问题就是给定 $f : A \to Y$，是否能将其**延拓**到整个 X 上，这便是映射提升问题. Tietze 扩展定理告诉我们，如果 X 是**正规**（T4）的，那么其任何闭集 A 上的函数都可以被延拓到整个 X 上，这是点集拓扑打到内容. 这里，我们更关心的问题是**同伦提升问题**，即一个 $A \to Y$ 的同伦能否被提升为 $X \to Y$ 的同伦.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dd, "i"'] \arrow[dr, bend left, "f"{name=F}] \arrow[dr, bend right, "g"'{name=G}] \arrow[from=F, to=G, Rightarrow, shorten=2pt] & \\
& Y \\
X \arrow[ur, bend left, "\tilde{f}"{name=FT}] \arrow[ur, bend right, dashed, "\tilde{g}"'{name=GT}] \arrow[from=FT, to=GT, Rightarrow, shorten=2pt] &
\end{tikzcd}$$

如图，给定同伦 $\theta : f \to g$ 和 $\tilde{f} : X \to Y$，我们希望 θ 可以提升为 $\tilde{\theta} : \tilde{f} \to \tilde{g}$，并且在每个时刻交换图表均成立，即 $\tilde{\theta}_t \circ i = \theta_t$. 这便给出了余纤维化的定义.

Definition 1.1.1 (余纤维化 Cofibration). 在 Top 中考虑. 称 $i : A \to X$ 是余纤维化，如果它满足**同伦提升性质**：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i \times \mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\
X \arrow[r, "i_0"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "\tilde{h}"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

或者表述为

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & Y^I \arrow[d, "p_0"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{h}"] & Y
\end{tikzcd}$$

注意我们不需要虚线处映射的唯一性成立. 如果上述图表对某个空间 Y 成立，我们称 $i : A \to X$ 对 Y 有 HEP. 当 A 是 X 的子空间时，称 (A, X) 为余纤维化对.

如果在 $\mathsf{Top}_\bullet$ 中定义余纤维化，只需要把映射都替换为带基点映射，同伦都替换为带基点同伦. 特别地，把上面图标里的 $X \times I$ 换成 $X \times I_+$，把 Y^I 选定基点 const $*$. 如果带基点空间 $(X, *)$ 满足基点的含入映射是余纤维化，那么称其为 well-pointed 的.

这三张图表分别给了我们三种不同的看法. 我们先来看后两种. 第三张图表告诉我们 cofibration 和之后的 fibration 有对偶关系，我们之后会回到这个话题. 第二张图表很像一个 pushout，事实上可以利用 pushout 的性质把它简写为

$$\begin{tikzcd} Mi \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "h"'] & X \times I \arrow[d, dashed, "\tilde{h}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

特别地，取 $Y = Mi, h = \mathrm{id}$，那么就可得到 $X \times I \xrightarrow{r} Mi$ 使得 $r \circ j = \mathrm{id}$.（我本来想写存在 $X \times I \to Mi$ 的收缩的，但是为了强调 A 不一定是 X 的子空间，Mi 也不一定是 $X \times I$ 的子空间，所以舍去了这种写法） 另一方面，如果这样的 r，那么对任意图表都可以取 $\tilde{h} = h \circ r$ 就得到 $\tilde{h} \circ j = h$，所以对任何空间 Y 都有 HEP 性质成立. 因此 Mi 这个空间是 **universal** 的.

Proposition 1.1.2. TFAE:

- $i : A \to X$ 是余纤维化。
- 存在 $r : X \times I \to Mi$ 使得 $r \circ j = \mathrm{id}_{Mi}$.
- $i : A \to X$ 对 Mi 满足 HEP.

这样一来，$Mi \to j(Mi)$ 是同胚，所以 j 是嵌入.（集合层面上，首先这是满射，其次根据左逆的存在性可知这也是单射. 于是 $j : Mi \to j(Mi)$ 是双射，其逆为 $r|_{j(Mi)}$. 再根据 j 和 $r|_{j(Mi)}$ 都连续可得这是同胚.） 根据映射的建构过程，A 通过 i_0 嵌入到 $A \times I$ 中，然后通过 $i \times \mathrm{id}$ 被打到 $X \times I$ 上，所以 $j \circ i_0$ 把 A 打入 $X \times \{0\}$ 中，因此 A 可被嵌入 X，于是我们可以“认为”A 就是 X 的一个子空间.

我们不妨设 A 是 X 的子空间，那么 $j(Mi) = A \times I \cup X \times \{0\}$，因而有同胚

$$Mi \cong (A \times I) \cup (X \times \{0\}). \tag{$\star$}$$

我们需要指出这条性质 $\star$ 的意义，下设 $i : A \to X$ 是包含映射. 对**任意**的 i，我们都可以通过泛性质建构 $Mi \to A \times I \cup X \times \{0\}$，但是我们没有理由说这是一个同胚. 上面的讨论指出如果 i 是余纤维化那么这的确是一个同胚. 如果 $A \subset X$ 是闭集，那么很容易通过粘贴引理（A, B 是闭集，如果有 $f : A \to X$，$g : B \to X$ 在 $A \cap B$ 上取值相同，那么有定义在 $A \cup B$ 上的连续函数分别在 A, B 上和 f, g 等同.）知道 $A \times I \cup X \times \{0\}$ 满足推出的泛性质，从而得到上述同胚. 在后面的例子中我们会看到闭性的重要性，它能

够让我们直接用 $(\star)$ 把抽象的泛性质验证更改为在子空间拓扑下的讨论，这无疑是更加直观的（或者说：如果 $(\star)$ 是不成立的，那无疑是很不直观的）

Example 1.1.3. 我们举一个 Mi 和 $A \times I \cup X \times \{0\}$ 上的拓扑不同的例子. 考虑 $A = (0, 1]$ 以及 $X = [0, 1]$，则二者在集合上都是 $(0, 1] \times I \cup [0, 1] \times \{0\}$.

- 在 $I \times I$ 的子空间拓扑下，数列 $(1/n, 1/n)$ $(n \in \mathbb{N})$ 收敛到 $(0, 0)$，因为以 $(0, 0)$ 为圆心的任何小开球都包含该数列中的某一点.
- 在 $(0, 1] \times I \sqcup [0, 1] \times \{0\}$ 的商空间拓扑下，存在一个包含 $(0, 0)$ 的开集不含对角线上的其它点. 考虑直线 $y = x/2$ 在 $(0, 1] \times I$ 上划出的一个三角形区域（$y = x/2$ 这条直线不含边界），该区域当然是 $(0, 1] \times I$ 中的一个开集，记为 U. 将 U 投影到商空间 Mi 上并上点 $\{(0, 0)\}$. 得到的新集合在 $(0, 1] \times I$ 处的原像是 U，在 $[0, 1] \times \{0\}$ 处的原像是其本身，这两者都是开集. 因此数列 $(1/n, 1/n)$ 不收敛到 $(0, 0)$.

事实上，在这个例子中商拓扑带有比子空间拓扑更多的开集.

反过来，i 是余纤维化能否推出 A 是闭集？当 X Hausdorff 时这是成立的. 将 A 实现为子空间 $A \times \{0\} \subset X \times \{0\} \subset X \times I$，考虑 $A \times \{0\}$ 中一串极限为 a 的点列 $\{a_i\}$，则 $a \in X \times \{0\}$. 根据 $X \times I$ 的 Hausdorff 性点列极限是唯一的. 根据 r 的连续性，$\lim r(a_i) = r(a)$，但是 $r(a_i) = a_i$，所以 $r(a) = a$. 所以 $a \in (X \times \{0\}) \cap \operatorname{im} r = A \times \{0\}$，这就证明了 $A \times \{0\}$ 是极限点封闭的，从而是 $X \times \{0\}$ 中的闭集.

Remark. "不动点"这个性质实际上引出了另一种做法. 考虑

$$\Phi : X \to (X \times I)^2,\ x \mapsto \big((x, 0), jr(x, 0)\big).$$

那么 $i(A) = \Phi^{-1}(\Delta_{X \times I})$，其中 $\Delta_{X \times I}$ 指 $X \times I$ 的对角线. 而我们直到 Hausdorff 性等价于对角线集合是闭集.

Proposition 1.1.4. 设 $i : A \to X$ 是余纤维化.

- $i : A \to i(A)$ 是同胚.
- $j : Mi \to (A \times I) \cup (X \times \{0\})$ 是同胚.
- 如果 X 是 Hausdorff 空间，则 $i(A)$ 是 X 中的闭集，这时我们称 i 是一个闭的余纤维化（closed cofibration）.

Remark. 如果使用 0.2 节的语言，可以证明如果 $X \in \mathsf{CGWH}$，那么 i 就是闭余纤维化. 从而在这个范畴里讨论的所有余纤维化都是闭余纤维化.

接下来我们给出一些余纤维化的例子.

Example 1.1.5 (Composition property). 余纤维化的复合是余纤维化. 即如果 $i : A \to X$，$j : X \to Y$ 是余纤维化，则 $j \circ i : A \to Y$ 是余纤维化.

Proof. 只需将两个推出图表进行横向的复合：

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[r, "j"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
A \times I \arrow[r] \arrow[drrr, bend right] & X \times I \arrow[r] \arrow[drr, dashed] & Y \times I \arrow[dr, dashed] & \\
 & & & Z
\end{tikzcd}
$$

所以 $j \circ i$ 是余纤维化.

Example 1.1.6 (Product property). 在一定条件下余纤维化的乘积是余纤维化.

- 设 $i : A \to X$ 是余纤维化，如果 i 是闭余纤维化或者 $B \in \mathsf{CG}$，那么 $\mathrm{id} \times i : B \times A \to B \times X$ 是余纤维化. 特别地，$A \times I \to X \times I$ 是余纤维化.
- 设 $i : A \to X$，$j : B \to Y$ 是闭余纤维化，则 $i \times j : A \times B \to X \times Y$ 总是余纤维化.
- 在 CGWH 范畴中所有纤维化都是闭纤维化，所有总有乘积性质成立.

Proof. 我们先说明为什么这个命题需要条件. 条件立刻告诉我们存在收缩

$$X \times I \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \cong Mi.$$

我们可以很容易得到存在收缩

$$B \times X \times I \to B \times (A \times I \cup X \times \{0\}) \cong B \times M(i).$$

但如果没有条件的话，右边两个空间都不和 $M(\mathrm{id} \times i)$ 同胚!

- 如果 i 是闭余纤维化，那么 A 可以实现为 X 的**闭子集**，从而 $B \times A \times \{0\}$ 是 $B \times X \times \{0\}$ 的**闭子集**，根据粘贴引理可证明

$$M(\mathrm{id} \times i) \cong B \times (A \times I \cup X \times \{0\}).$$

- 如果 B 是紧生成的，那么可以直接验证 $B \times (\cdot)$ 这个函子是保推出的，从而

$$M(\mathrm{id} \times i) \cong B \times M(i).$$

后一个命题只是使用该命题两次后所得的结果.

Example 1.1.7 (Pushout property). 余纤维化的推出是余纤维化. 即如果 $i : A \to X$ 是余纤维化，$f : A \to B$ 是**任意映射**，则 $B \to B \sqcup_f X$ 是余纤维化，我们称其为 f **诱导出**的余纤维化.

Proof. 我们验证泛性质：设 Y 是 $B \leftarrow A \rightarrow X$ 的推出，那么 $Y \times I$ 是 $B \times I \leftarrow A \times I \rightarrow X \times I$ 的推出.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & B \times I \arrow[ddd] \arrow[dddr, bend left] \\
& A \arrow[ul] \arrow[r] \arrow[d, "i"] & A \times I \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& X \arrow[r] \arrow[dl] & X \times I \arrow[dr] \arrow[ddrr, dashed] & \\
Y \arrow[rrr] \arrow[drrrr, bend right] & & & Y \times I \arrow[dr, dashed] \\
& & & & Z
\end{tikzcd}$$

上述图表是交换的，且左右是两个 pushout diagram，中间是一个 weak pushout diagram. 现在给定映射 $Y \rightarrow Z$ 和 $B \times I \rightarrow Z$，将红色箭头复合，紫色箭头复合，通过内部方块是弱推出可给出一个 $X \times I \rightarrow Z$ 的映射. 再通过右侧图表的 pushout 性给出所需的映射 $Y \times I \rightarrow Z$. 最后验证这一诱导出的映射是满足原图表的交换性的，只需验证最下侧三角形的交换性. 这是因为我们可验证

$$\begin{aligned} X \rightarrow Y \rightarrow Y \times I \rightarrow Z &= X \rightarrow X \times I \rightarrow Y \times I \rightarrow Z \\ &= X \rightarrow X \times I \rightarrow Z = X \rightarrow Y \rightarrow Z. \end{aligned}$$

再根据左侧图表是 pushout，因此 $X \rightarrow Y$ 是单的，所以最下侧三角形交换.

Pushout Property 的应用十分广泛，下面是几个例子.（tom Dieck 5.1 章还可以插入一些内容在此处.）

Example 1.1.8. 设 $X \xleftarrow{i} A \xrightarrow{j} Y$ 构建出双映射柱 $M(i,j)$，则 $(X \sqcup Y, M(i,j))$ 是余纤维化对.

Proof. 我们首先证明 $(\partial I, I)$ 是余纤维化对. 只需证明 $\partial I \times I \cup I \times \{0\} = J^2$ 是 I^2 的收缩. 我们可以通过选择一个在方片外的点，比如说 $A = (0.5, 2)$，然后将方片内部的每一点 P 沿着射线 AP 推到边界上，显然边界上的点在该操作下不发生变化，因此这给出一个（形变）收缩.

由于这是一个闭余纤维化，所以可以利用乘积性质得到 $A \times \partial I \rightarrow A \times I$ 是余纤维化. 根据推出性质，双映射柱可由

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup A \arrow[r, "i \sqcup j"] \arrow[d] & X \sqcup Y \arrow[d] \\
A \times I \arrow[r] & M(i,j)
\end{tikzcd}$$

得到，所以 $X \sqcup Y \rightarrow M(i,j)$ 是余纤维化.

双映射柱是一个很广泛的对象，可以由它得到不少推论：

- 令其中一个映射为 id 就回到映射柱. 设 $f: X \to Y$ 建构出单映射柱 $M(f)$，则 $X \sqcup Y \to Mf$ 是余纤维化.
- 令其中一个映射是 $X \to *$ 就得到映射锥. 设 $f: X \to Y$ 建构出映射锥 $C(f)$，则 $* \sqcup Y \to Cf$ 是余纤维化.
- 根据上一条，$* \to CX$ 和 $X \to CX$ 都是余纤维化.

我们有这样一种感觉：只要在 A 附近有类似 $A \times I$ 的结构嵌入在 X 中，那么 $A \hookrightarrow X$ 就是余纤维化（比如可以想象 $(A, A \times I \cup X \times \{0\})$ 成为余纤维化只和 A 附近的结构有关），因为只要有一个从 A 出发的同伦，我们就可以在 A 附近把这个 X 中的“$A \times I$”逐渐地挤压到 A，然后再沿着关于 A 的同伦移动即可，我们将在 1.3 节证明这个直觉是对的，而且还是充要的.

Example 1.1.9. 如果 (A, X) 是余纤维化对，那么 $(*, X/A)$ 是余纤维化对，或者说 X/A 是 well-pointed 的.

Proof. 还是根据推出性质，这是因为 X/A 是 $X \leftarrow A \to *$ 的推出.

Example 1.1.10. $S^n \hookrightarrow D^{n+1}$ 是余纤维化，$\partial I^n \hookrightarrow I^n$ 是余纤维化，$J^n \hookrightarrow I^n$ 是余纤维化（$J^n = \partial I^n - I^{n-1}$），$* \to S^n$ 是余纤维化. 所有 CW-复形对 (A, X) 都是余纤维化对.（回忆 CW 复形对的意思不少 A, X 都是 CW-复形，而是 X 的骨架从 A 开始建构，A 直接被纳入第零层）

Proof. 首先 D^{n+1} 可建构为 CS^n，所以 (S^n, D^{n+1}) 是余纤维化对. 然后可由通过一个同构同时把 D^{n+1} 送到 I^{n+1}，把 S^n 送到 ∂I^{n+1}，所以 $\partial I^n \to I^n$ 是余纤维化.

$J^n \to I^n$ 是余纤维化的证明同之前对于 $\partial I \to I$ 是余纤维化的证明. 根据 $S^{n-1} \to D^n$ 是余纤维化可知 $* \to D^n/S^{n-1} \cong S^n$ 是余纤维化.

最后关于 CW-复形，则是不断利用 pushout property. 因为 X 就是一步步通过 $\coprod D^{n+1} \leftarrow \coprod S^n \to X^n$ 建构出来的，可以对层数归纳地证明 (A, X) 是余纤维化对. **这会成为后面研究 CW 复形时非常非常有用的性质，并且能直接导出一些关于 CW 复形的定理!** （我记得 Hatcher 第零章就用 CW-pair 代替了 HEP-property 去看了一些例子.）

Example 1.1.11. 设 (A, X) 是余纤维化对，则 $(A \times I \cup X \times \partial I, X \times I)$ 也是余纤维化对.

Proof. 只需证明存在 $X \times I \times I \to (A \times I \cup X \times \partial I) \times I \cup X \times I \times \{0\}$ 的收缩即可. 后者可以改写为

$$A \times I^2 \cup X \times J^2.$$

条件告诉我们 $(A \times I, X \times I)$ 是余纤维化对，所以存在一个收缩 $X \times I^2 \to (A \times I^2 \cup X \times I \times \{0\})$. 所以我们只需要找一个同胚 $\phi: I^2 \to I^2$ 使得 J^2 恰好被同胚到 $I \times \{0\}$，

这样在每点处都应用 ϕ，就有

$$\begin{tikzcd}
A \times I^2 \cup X \times J^2 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"] & X \times I^2 \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "\cong"] & A \times I^2 \cup X \times J^2 \arrow[d, "\cong"] \\
A \times I^2 \cup X \times I \times \{0\} \arrow[r, hook] & X \times I^2 \arrow[r, "r"] & A \times I^2 \cup X \times I \times \{0\}
\end{tikzcd}.$$

让图表交换的 r' 就是我们想要的收缩映射.（我们可以这样想象：把 I^2 重新赋予一个坐标结构，使得在新的坐标下 J^2 被等同到一条边上. 这样只需要在新坐标下利用我们已有的收缩即可.）

1.2 Cofibration and Transport

本节对应 May 5.5 节和 Tom Dieck 5.2 节. 我们接下来考虑余纤维化和同伦的关系. 这需要用到我们之前关于余纤维化性质和同伦提升性质的观察. 我们把视线从单一的一个映射如何提升移开，而是去看它从整体上给出了怎样的信息（就像从考虑 f 转化为考虑 $f_* : [Z, X] \to [Z, Y]$） 我们再次写出这张图表：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dd, "i"'] \arrow[dr, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow"] & \\
& Y \\
X \arrow[ur, bend left, "\tilde{f}"] \arrow[ur, bend right, dashed, "\tilde{g}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] &
\end{tikzcd}$$

对任意 $f \in \mathrm{Hom}(A, Y)$，一个从 f 到 g 的同伦 h 把一个 $(X, i) \to (Y, f)$ 的映射 $\tilde{f}$ 通过同伦转移到一个 $(X, i) \to (Y, g)$ 的映射 $\tilde{g}$，称 $\tilde{g}$ 为 $\tilde{f}$ 在 h 的同伦提升下的像.

但在 Top 下这个转移不是良定的，因为余纤维化的性质不保证同伦的提升具有唯一性的. 我们的问题自然转化为：如果 h 有两个不同的提升 $\tilde{h}$ 和 $\tilde{h}'$，那么提升所得结果 $\tilde{g}, \tilde{g}'$ 是否在 rel A 的意义下同伦？（它们当然是普通同伦的.） 事实上我们能得到更强的结果：它们所在的同伦等价类只和 h 所在的同伦等价类有关.

Proposition 1.2.1. *在上述图表中，如果 $h, h' : f \Rightarrow g$ 是定端同伦的，那么它们的任意提升 $\tilde{h} : \tilde{f} \Rightarrow \tilde{g}$，$\tilde{h}' : \tilde{f} \Rightarrow \tilde{g}'$ 都满足 $\tilde{g} \simeq \tilde{g}'$ rel A.*

Proof. 我们其实只需要具体写下来我们**有什么**，就可以知道我们应该怎样去操作了.

$$\Phi : A \times I \times I \to Y, \begin{cases} \Phi(\cdot, 0, t) = f, \quad \forall t \in I; \\ \Phi(\cdot, 1, t) = g, \quad \forall t \in I; \\ \Phi(\cdot, \cdot, 0) = h, \ \Phi(\cdot, \cdot, 1) = h'. \end{cases}$$

我们想找到 $\tilde{\Phi} : X \times I \times I \to Y$，使得

$$\tilde{\Phi} \circ (i \times \mathrm{id} \times \mathrm{id}) = \Phi, \ \tilde{\Phi}(\cdot, \cdot, 0) = \tilde{h}, \ \tilde{\Phi}(\cdot, \cdot, 1) = \tilde{h}'.$$

这样 $\tilde{\Phi}(\cdot, 1, \cdot)$ 是连接 $\tilde{g}$ 和 $\tilde{g}'$ 的同伦，并且它在 A 上的限制始终是 g，就给出了一个相对 A 的同伦.

因此我们想要把 $A \times I \times I \to Y$ 提升为 $X \times I \times I \to Y$，并且保留 $X \times I \times \partial I$ 处的提升. 根据例 1.1.11，$(A \times I \cup X \times \partial I, X \times I)$ 是余纤维化对. 余纤维化性足以给出我们上面所需的所有性质.

上面的命题用群胚的语言可更简洁地写为：

Corollary 1.2.2. 设 $i : A \to X$ 是余纤维化. 则对任意空间 Y，可定义**同伦转移函子** $\Phi : \Pi(X, Y) \to \mathsf{Set}$，满足

$$\Phi : \begin{cases} \text{Obj: } f \mapsto [(X, i), (Y, f)]. \\ \text{Mor: } \big[[h] : f \to g\big] \mapsto [\tilde{f} \mapsto \tilde{f} \text{ 在 } h \text{ 提升下的像 } \tilde{g}]. \end{cases}$$

对每个同伦 $h : f \to g$，将 h 对应的**转移映射**记为

$$h_\sharp : [(X, i), (Y, f)] \to [(X, i), (Y, g)].$$

Proof. 上一个命题说明了转移映射 $h_\sharp$ 是良定义的，因为在 $\Phi(X, Y)$ 中那些定端同伦的 h 被等同为一个等价类. 函子性来源于：

- 对常值同伦 h，可选择常值同伦作为其提升，所以 $\mathrm{const}_\sharp = \mathrm{id}$.
- 如果有两个同伦 $h : f \to g$ 和 $h' : g \to k$，那么有同伦合成 $h' \circ h : f \to k$，并且它的提升可选定为 $\tilde{h}' \circ \tilde{h}$. 这导致 $(h' \circ h)_\sharp = h'_\sharp \circ h_\sharp$.

因此 Φ 的确是一个范畴间的函子.

Corollary 1.2.3. 设 $i : A \to X$ 是余纤维化. 若两个映射 $f, g : A \to Y$ 是同伦的，则有集合间的同构

$$[(X, i), (Y, f)] \cong [(X, i), (Y, g)].$$

Proof. 这是因为函子把同构的对象打到同构的对象. 在群胚中两个对象只要在同一个连通分支中就是同构的，特别地在 $\Pi(X, Y)$ 中同构的对象就是同伦的映射.

除了同伦转移函子之外，在 Top^A 范畴中还有映射诱导的转移函子. 固定 $(X, i) \in \mathsf{Top}^A$，则存在一个函子 $\mathsf{Top}^A \to \mathsf{Set}$ 把 (Y, f) 打到 $[(X, i), (Y, f)]$，把 $g : (Y, f) \to (Z, gf)$ 打到

$$g_* : [(X, i), (Y, f)] \to [(X, i), (Z, gf)],\ [k] \mapsto [g \circ k].$$

这只不过是 Top 上 $f_* : [A, X] \to [A, Y]$ 在 Top^A 上的翻译.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "gf"] & \\ X \arrow[r, "k"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

把这两件事结合起来，可以得到下述结果：

Proposition 1.2.4. 设 $i : A \to X$ 是余纤维化，如果 $g : Y \to Z$ 是同伦等价，则 g_* 诱导出集合间的同构

$$g_* : [(X, i), (Y, f)] \cong [(X, i), (Z, gf)].$$

Proof. 首先证明如果 $k : Y \to Y$ 满足 $k \simeq \mathrm{id}$，则 k_* 诱导出同构. 这是因为我们可以寻找一个同伦 $h : \mathrm{id} \to k$，那么 $h \circ (f \times \mathrm{id})$ 就是 $f \to kf$ 的同伦. 根据推论 1.2.3 可知

$$\big(h \circ (f \times \mathrm{id})\big)_\sharp : [(X, i), (Y, f)] \to [(X, i), (Y, kf)]$$

是集合间的同构. 具体地，这个映射把每个 $\phi : (X, i) \to (Y, f)$ 送到它在 $h \circ (f \times \mathrm{id})$ 的某个同伦提升下的像. 但是 $h \circ (f \times \mathrm{id})$ 的同伦提升就可以被选择为 $h \circ (\phi \times \mathrm{id})$，它的起点为 ϕ，终点为 $k \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[lld, "i"'] \arrow[ld, "f"'] \arrow[rd, bend left, "f"] \arrow[rd, "kf"'] \arrow[rd, phantom, "\Swarrow", shift left] & \\
X \arrow[r, "\phi"'] & Y \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, bend right, "k"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] & & Y
\end{tikzcd}$$

（这个证明很有趣，同伦提升可以被手动选择，且它完全是在 ϕ 的“外侧”操作的） 所以 $\big(h \circ (f \times \mathrm{id})\big)_\sharp$ 和 k_* 等同，从而 k_* 是同构. 回到原题，设 g 的同伦逆为 h。则我们有下述集合之间的映射

$$[(X, i), (Y, f)] \xrightarrow{g_*} [(X, i), (Z, gf)] \xrightarrow{h_*} [(X, i), (Y, hgf)] \xrightarrow{g_*} [(X, i), (Y, ghgf)].$$

并且 $h_* \circ g_*$ 是同构，$g_* \circ h_*$ 也是同构. 根据前者可知 g_* 是单射，h_* 是满射；根据后者可知 h_* 是单射，g_* 是满射. 在 Set 上单射且满射就是同构，所以 g_* 是同构.（后半部分的证明应当也是眼熟的：它完全同理于证明如果有同伦等价 $f : X \to Y$，则 $f_* : \pi_1(X, *) \to \pi_1(Y, f(*))$ 是同构.）

接下来我们将证明一个 Hatcher 第 0 章中的金典命题（Prop 0.19），这会是我们上面讨论的自然推论.

Proposition 1.2.5. 设 $i : A \to X$ 和 $j : A \to Y$ 都是余纤维化. 如果 $f : (X, i) \to (Y, j)$ 在 Top 上是同伦等价，则它在 Top^A 上也是同伦等价.

Proof. 根据上一个命题 1.2.4 以及 j 是余纤维化可知：

$$f_* : [(Y, j), (X, i)] \to [(Y, j), (Y, j)],\ [k] \mapsto [f \circ k]$$

是同构. 寻找 $[\mathrm{id}_Y]$ 的原像，这意味着存在 $[g] \in [(Y, j), (X, i)]$ 使得 $[f] \circ [g] = [\mathrm{id}_Y]$.

现在将 i, j 地位对调，以 g 替代先前 f 的位置. 根据 f 在 hTop 中是同构且 g 是 f 的右逆可知 g 也是 hTop 中的同构. 因此可以重复之前的操作，根据 i 是余纤维化可知存在 $[f'] \in [(X, i), (Y, j)]$ 使得 $[g] \circ [f'] = [\mathrm{id}_X]$. 从而

$$[f] = [f] \circ ([g] \circ [f']) = ([f] \circ [g]) \circ [f'] = [f'].$$

所以 $[f]$ 在 hTop^A 上是同构，在 Top^A 上是同伦等价.

Remark. 这个命题在我第一次见到时候真的非常惊艳. 我当时在一个楼道里想了很久用什么办法可以推出 $[g]\circ[f]=[\mathrm{id}_X]$ 没有想法，最后看这个以 g 替代 f 重复操作然后利用左逆元和右逆元相等推出结论的想法简直惊讶地目瞪口呆！我们不需要解释这个命题的强大程度，比起单纯把它作为一个技术性的命题，我更享受这种把它一步一步拆开（1.1.11→1.2.2→1.2.3→1.2.4→1.2.5），直到把它分解成一些自然想法的叠加的过程.

上面的命题在 Top(2) 范畴中还可以作进一步推广.

Proposition 1.2.6. 设 $i:A\to X$ 和 $j:B\to Y$ 是余纤维化. 如果有映射对 $(f,\tilde f):(A,X)\to(B,Y)$ 满足 $f:A\to B$ 和 $\tilde f:X\to Y$ 分别是 Top 上的同伦等价，则 $(f,\tilde f)$ 是 Top(2) 上的同伦等价.

Proof. 证明和之前是类似的，只是要考虑的细节更多一些. 我们证明任意选择 f 的同伦逆 $g:B\to A$，都可以把 g 提升到 $\tilde g:Y\to X$ 使得 $(g,\tilde g)$ 是 Top(2) 上 $(f,\tilde f)$ 的同伦逆. 选定 $H:fg\simeq\mathrm{id}_B$ 和 $K:gf\simeq\mathrm{id}_A$.（注：最后会发现虽然映射可以选定为 g，但是同伦未必和一开始选定的同伦 H 和 K 等同.）

由于 $\tilde f$ 是同伦等价以及 j 是余纤维化，根据命题 1.2.4 可知在 Top^B 下有：

$$\tilde f_*:[(Y,j),(X,ig)]\xrightarrow{\sim}[(Y,j),(Y,\tilde f ig)]=[(Y,j),(Y,jfg)]$$

是集合间的同构. 又因为 $(j\times\mathrm{id})\circ H$ 给出同伦 $jfg\simeq j$，根据推论 1.2.3 可知

$$\big((j\times\mathrm{id})\circ H\big)_\sharp:[(Y,j),(Y,jfg)]\to[(Y,j),(Y,j)]$$

是集合间的同构. 我们考虑 $[\mathrm{id}_Y]$ 在 $\big((j\times\mathrm{id})\circ H\big)_\sharp\circ\tilde f_*$ 下的原像，记为 $[\tilde g]$，$\tilde g$ 为其任意一代表元. 则 $\tilde g$ 满足交换图表

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{g} & A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ Y & \xrightarrow{\tilde g} & X & \xrightarrow{\tilde f} & Y \end{array}$$

并且 $\tilde f\circ\tilde g:(Y,j)\to(Y,jfg)$ 满足：当 fg 沿着 H 同伦到 id_B 时，$\tilde f\circ\tilde g$ 沿着 H 的提升 $\tilde H$ 同伦到 $\tilde H_1$，并且 $\tilde H_1$ 和 id_Y rel B 同伦（记这个同伦为 $\tilde T$）. 现在 $(H,\tilde H)$ 还不满足我们的要求，我们希望的是把 fg 拉到 id_B 的同时 $\tilde f\tilde g$ 也被拉到 id_Y，这需要 $\tilde H$ 和 $\tilde T$ 两个操作是同时进行的. 这里需要再次利用 1.1.11：

- 给定 $\Phi:B\times I\times I\to B$，对每个 t 均有 $\Phi(\cdot,\cdot,t)=H$，也就是在第二个分量移动时映射不发生变化.
- 我们想要的 $\tilde\Phi:Y\times I\times I\to Y$ 是 $(j\times\mathrm{id}\times\mathrm{id})\circ\Phi$ 的提升，并且希望边界上的提升 $\tilde\Phi(\cdot,\cdot,0)=\tilde H$，$\tilde\Phi(\cdot,1,\cdot)=\tilde T$ 被保留下来.

根据 $(B\times I\cup Y\times\{1\},Y\times I)$ 是余纤维化，上面的提升 $\tilde\Phi$ 是存在的. 所以我们可选择 $\tilde\Phi$ 的对角线 $H'(\cdot,t)=\tilde\Phi(\cdot,t,t)$ 作为我们新的同伦，此时 (H,H') 就给出 Top(2) 中 $(fg,\tilde f\tilde g)\to(\mathrm{id}_B,\mathrm{id}_Y)$ 的同伦.

接下来调换 (A,X) 和 (B,Y) 之间的地位，以 $(g,\tilde{g})$ 为考虑对象. 由于在 hTop 中 $\tilde{f}$ 是同构，而 $\tilde{g}$ 是它的右逆，故 $\tilde{g}$ 在 hTop 中也是同构，并且可以选择 f 作为 g 的同伦逆. 所以根据 i 是余纤维化，可以重复上面的证明过程给出 $(f,\tilde{f}'):(A,X)\to(B,Y)$ 和 $\mathsf{Top}(2)$ 中的同伦 $(K,K'):(gf,\tilde{g}\tilde{f}')\to(\mathrm{id}_A,\mathrm{id}_X)$. 于是在 $\mathsf{Top}(2)$ 中

$$[(f,\tilde{f}')]=[(f,\tilde{f})]\circ[(g,\tilde{g})]\circ[(f,\tilde{f}')]=[(f,\tilde{f})].$$

于是 $(g,\tilde{g})$ 是 $(f,\tilde{f})$ 在 $\mathsf{Top}(2)$ 下的同伦逆，证毕. 我们还可以具体写下同伦：

$$\begin{aligned}(g,\tilde{g})\circ(f,\tilde{f})&\overset{\mathrm{id}\circ\mathrm{id}\circ(K,K')^{-1}}{\Rightarrow}(g,\tilde{g})\circ(f,\tilde{f})\circ(g,\tilde{g})\circ(f',\tilde{f}')\\&\overset{\mathrm{id}\circ(H,H')\circ\mathrm{id}}{\Rightarrow}(g,\tilde{g})\circ(f,\tilde{f}')\overset{(K,K')}{\Rightarrow}(\mathrm{id}_A,\mathrm{id}_X).\end{aligned}$$

需要强调这里 $gf\Rightarrow g(fg)f\Rightarrow gf\Rightarrow\mathrm{id}$ 就和一开始给定的 K 不同伦.

Corollary 1.2.7. *如果包含映射 $i:A\to X$ 是余纤维化也是同伦等价，那么存在 $X\to A$ 的形变收缩.*

Proof. 存在 $X\to A$ 的形变收缩当且仅当 (A,id_A) 和 (X,i) 在 Top^A 下同伦等价. 而 id_A 和 i 都是余纤维化，所以根据命题 1.2.5，这是 X,A 在 Top^A 下同伦等价的直接推论.

下面的命题虽然简洁，但是很难直接通过定义来证明.

Proposition 1.2.8. *如果 $i:A\to X$ 是余纤维化，那么存在从 $X\times I$ 到 $(A\times I)\cup(X\times\{0\})$ 的形变收缩.*

Proof. 我们在 1.1.11 中证明了 $\big((A\times I)\cup X\times\{0\},X\times I\big)$ 是余纤维化对. 另一方面，这两个空间显然都能形变收缩到 $X\times\{0\}$. 所以它们是同伦等价的. 根据推论 1.2.7 即证.

同样地，下个命题也并非直观：

Proposition 1.2.9. *两个空间同伦等价当且仅当它们同时是某个空间的形变收缩.*

Proof. 右推左显然. 已知 $f:X\to Y$ 是同伦等价，考虑映射柱 Mf. 根据 1.1.8，$X\to Mf$ 和 $Y\to Mf$ 都是余纤维化. 另一方面，Mf 可形变收缩到 Y，所以 $Mf\simeq Y\simeq X$. 于是根据推论 1.2.7 可知 Mf 可形变收缩到 X.

上面的理论可以通过令 $A=*$ 的方式自然进入 $\mathsf{Top}_\bullet$ 上的讨论. 此时 $\Pi(*,Y)$ 就成为 Y 的基本群胚 $\Pi(Y)$. 转移函子成为

$$\Phi:\Pi(Y)\to\mathsf{Set},\begin{cases}\text{Obj: } y\mapsto[(X,*),(Y,y)];\\\text{Mor: } [\gamma:y\to z]\mapsto\gamma_\sharp:[(X,*),(Y,y)]\to[(X,*),(Y,z)].\end{cases}$$

这就化归为我们经常所说的“转移基点映射”．特别地应用命题 1.2.3，如果 y,z 在同一个道路分支中，则 $\gamma_\sharp$ 为集合间的双射．我们看到转移函子良定只需 $(*,X)$ 是余纤维化对，即 X 是 well-pointed space.

我们可以由此来建立 $[X,Y]$ 和 $[X,Y]_\bullet$ 之间的关系．下假设 Y 是道路连通的，并且 X 是 well-pointed 的.

Proposition 1.2.10. 通过同伦转移函子的限制可给出基本群 $\pi_1(Y,*)$ 在 $[X,Y]_\bullet$ 上的作用．那么同一轨道中的元素在忘却映射 $\mathcal{F}:[X,Y]_\bullet\to[X,Y]$ 下给出相同的像，并且这诱导出从 $[X,Y]_\bullet$ 的 $\pi_1(Y,*)$-陪集到 $[X,Y]$ 的双射.

Proof. 首先任何道路 $\gamma:y\to z$ 都把任何 $f:(X,*)\to(Y,y)$ 送到与之同伦的一个映射 $\gamma_\sharp f:(X,*)\to(Y,z)$．那么同一轨道中的同伦类当然在 $[X,Y]$ 中代表同一对象．另一方面，根据道路连通性，任一 $f:(X,*)\to(Y,y)$ 都可通过一条从 y 到 $*$ 的路径被同伦到某个保基点的映射上去，所以该诱导映射是满的．最后如果两个映射 f,g 在不考虑基点的意义下同伦，考虑该同伦在基点处的限制，这给出一条回路 γ，并且 $\gamma_\sharp$ 把 $[f]$ 映到 $[g]$，这导致它们落在同一轨道中，这就证明了该诱导映射是双射.

回忆在基本群中，$\gamma_\sharp$ 是一个群同态．事实上可以证明如果 $(X,*)$ 具有余群结构就可以证明这件事，证明本质是因为群结构完全可以在 X 处进行处理后得到.

Proposition 1.2.11. 如果 $(X,*)$ 具有余群结构，那么

$$\gamma_\sharp:[(X,*),(Y,y)]\to[(X,*),(Y,z)]$$

是群同态.

Proof. 对 $[f],[g]\in[(X,*),(Y,y)]$，根据余群结构它们的乘法被定义为

$$[fg]:X\xrightarrow{m}X\vee X\xrightarrow{[f]\vee[g]}Y.$$

$\gamma_\sharp$ 把 $[f],[g]$ 分别提升为 $\gamma_\sharp[f]$ 和 $\gamma_\sharp[g]$，并且它们在基点处的提升轨迹相同．这导致 $f\vee g:(X\vee X,*)\to(Y,*)$ 可沿着 $\gamma_\sharp$ 被提升为 $\gamma_\sharp f\vee\gamma_\sharp g$，因此 $[fg]=m\circ[f\vee g]$ 在 $\gamma_\sharp$ 下的一个提升为 $m\circ([\gamma_\sharp f]\vee[\gamma_\sharp g])=[\gamma_\sharp f][\gamma_\sharp g]$，所以

$$\gamma_\sharp[fg]=[\gamma_\sharp f][\gamma_\sharp g].$$

这就证明了群同态.

特别地，当 $n\geq 2$ 时 S^n 可被赋予 Abel 群结构，此时转移映射 $\gamma_\sharp$ 就给出 Abel 群同态.

1.3 A criterion for a map to be cofibration

本节对应 May 5.4 节．这个简短的小节我们来介绍 Strøm 结构并给处余纤维化的另一个等价条件，而且这个等价条件非常的直观，容易加以应用．之后我们再给出

它的一些应用. 我们首先可以对 1.1 节提到的直观想法严格化：什么叫 A 的"附近"被"嵌入"一个 $A\times I$ 的结构？在流形的语言下（其实可能是我们希望有"边界"的概念把外界隔离开）可以得到下述定义：

Definition 1.3.1 (映射柱邻域 Mapping Cylinder Neighborhood). 设 X 是一个流形，A 是 X 的闭子集. 称包含 A 的子流形 N 是一个 A 的**映射柱邻域**，如果存在 $f:\partial N\to A$ 与同构 $Mf\cong N$ 使得 N 的边界被同胚到映射柱的顶 $\partial N\times\{1\}$，里面的 A 被同胚到映射柱底部的 A.

如果这样的映射柱邻域存在，给定 $f:X\to Y$ 和 $H:A\times I\to Y$，我们来验证它可被延拓为 $X\times I\to Y$ 的同伦. 根据 1.1.8 可知 $(\partial N\sqcup A, Mf)\cong(\partial N\sqcup A, N)$ 是余纤维化对，我们让它在 A 处沿着 H 提升，在 ∂N 处保持为 const $f|_{\partial N}$，得到一个同伦 $N\times I\to Y$. 这样由于 ∂N 处是常值同伦，它可以连续延拓到整个 X 上，这就给出了我们所需的提升.

Example 1.3.2. 考虑 $(D^n,\partial D^n)$. 我们可以把 ∂D^n 的一个带状邻域 $\partial D^n\times I$ 嵌入到 D^n 中，所以这给出 ∂D^n 的映射柱邻域，进而 $(D^n,\partial D^n)$ 是余纤维化对.

从上面的证明可以看出：只要有一个 ∂N 的"球壳"把里外世界隔开，并且 ∂N 可被固定为选取常值同伦的话，外面无论是怎样均有余纤维化成立. 在一般的拓扑空间中，我们可能没法找到这样一个"球壳"，但我们可以广泛地定义这样的"局部形变收缩"，它由一个"系数函数"控制.

Theorem 1.3.3 (Strøm). 设 A 是 X 的子空间. 一个从 $X\times I$ 到 $A\times I\cup X\times\{0\}$ 的收缩存在，当且仅当存在 $\varphi:X\to I$ 及同伦 $H:X\times I\to X$，满足

- $A\subset\phi^{-1}(0)$;
- $H_0=\mathrm{id}_X$;
- 对任意 $a\in A$ 有 $H(a,\cdot)=\text{const }a$;
- 当 $t>\varphi(x)$ 时 $H(x,t)\in A$.

我们解释上面定理的自然性：我们不要把 $X\times I\to A\times I\cup X\times\{0\}$ 看作是把一个柱体收缩到一个映射柱，而是在一个平面上，把 X 朝着 A 的方向进行同伦收缩，其中 A 上每点还赋有一个"高度". 每个点在零时刻处于其初始位置（在 $X\times\{0\}$ 上等同），A 中点的移动固定为在高度上从 0 均匀提升到 1（在 $A\times I$ 上等同）. 当一个点收缩到 A 内时，它被允许提升高度. 为了保证这个同伦收缩在 A 上是连续的，A 的邻域上的点应当被"拖拽"到 A 内，然后在高度上攀升. 系数函数 φ 就描述了 t 时刻收缩到 A 内的那些点，如果 φ 值为 1，代表这个点最终也没能收缩到 A 内.（一个好的可视化方法是追踪一个点在同伦下的轨迹）

Proof. 首先证明如果 φ, H 存在，那么可以给出收缩：考虑

$$r(x,t) = \begin{cases} (h(x,t), 0), & t \leq \varphi(x); \\ (h(x,t), t - \varphi(x)), & t > \varphi(x). \end{cases}$$

如果追踪每个 x 的像，它沿着 H 进行移动，从 $\varphi(x)$ 时刻起它均匀地提升高度. 特别地对 $a \in A$，它在 H 上保持不动并且高度被均匀提升到 1；对 $\varphi(a) = 1$。它全程只在 $X \times \{0\}$ 上进行移动.

另一方面，如果收缩 $r : X \times I \to A \times I \cup X \times \{0\}$ 存在，我们还是来追踪每个 x 的像. 它可以在 $X \times \{0\} \cup A \times I$ 上自由地同伦移动. 这条路径可以直接被投影到 X 上作为其在 H 下的运动轨迹，即考虑

$$H = p_X \circ r.$$

至于 φ，最 naive 的想法是考虑 x 最后一次进入 A 的时刻. 但是有可能会出现 x 先进入 A 最后又退出来的情况，这时应当有 $\varphi(x) = 1$. 所以我们希望尾位置处是一票否决的. 又注意到 $x \in A \times I$ 的一个充分条件是 x 在 I 方向上的投影大于零. 由此我们想到下面的定义：

$$\varphi(x) = \sup_{t \in I} \{t - p_I(r(x,t))\}.$$

对 $t > \varphi(x)$ 总有 $t - p_I(r(x,t)) \leq \varphi(x)$，从而 $p_I(r(x,t)) > 0$，此时 $H(x,t) \in A$. 对 x 满足 $r(x,1) \notin A \times I$，即 $H(x,1) \notin A$，一定有 $\varphi(x) = 1$. 最后对 $x \in A$ 根据移动的均匀性可知 $\varphi(x) = 0$.

最后我们验证 φ 的连续性：只需验证对任何连续映射 $f : X \times I \to I$ 均有 $\phi : X \to I, \phi(x) = \sup_{t \in I} f(x,t)$ 为连续映射. 只需证明任何 $(a,b) \subset I$ 的原像都是开集. 任取 $x \in X$ 使得 $\phi(x) = c \in (a,b)$，则存在 $t \in I$ 使得 $f(x,t) > a$. 根据 f 的连续性，存在 x 的开邻域 U 使得对任意 $y \in U$ 均有 $f(y,t) > a$，从而 $\phi(y) > a$. 另一方面，存在 $\varepsilon > 0$ 使得对任意 $t \in I$ 均有 $f(x,t) < b - \varepsilon$. 对每个 t，存在 (x,t) 的开邻域 $V_t \times W_t$ 使得对任意 $(y,s) \in V_t \times W_t$ 均有 $f(y,s) < b - \varepsilon$. 根据管状邻域定理（依赖于 I 的紧性），存在 x 的开邻域 V 使得对任意 $y \in V$ 和任意 $t \in I$ 均有 $f(y,t) < b - \varepsilon$，从而 $\phi(y) < b$. $U \cap V$ 就是我们所需的 x 在 $\phi^{-1}(a,b)$ 内的开邻域，证毕.