

Notes on v6

FE enthusiast enthusiast

2025.09.08

课程概要

- 课程名：微分流形与拓扑 (Honor)
- 周课时：3
- 授课教师：杨磊
- 给分方法：整理一学期课上的所有的笔记内容，最后提交，无考试
- 课程大纲：我认为真包含于王作勤的微分流形讲义.

Week 1: 2025/9/8

1 导论

我们在这门课中一般提到“流形”，就指微分流形。

为什么要定义流形？流形的概念来自于 Riemann，他发现对 Riemann 面，其洞数等于微分形式空间的维数。再比如，Gauss 在研究积分时，发现积分 $\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 的反函数定义在轮胎面上。

如果我们把光滑函数 C^∞ 替换成更好的函数 C^ω 或者多项式，就定义出了复流形和代数簇，所以从某种角度上这也是复几何和代数几何的先导课。

Definition 1.0.1. M 是一个微分流形，若它满足：

- (i) M 是拓扑空间；
- (ii) M 由一族对 $\{(M_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 给出；
- (iii) M_α 是一族开集，它覆盖 M ，即

$$\bigcup_{\alpha} M_\alpha = M.$$

ϕ_α 是从 M_α 到 $\mathbb{R}^n$ 中开集 O_α 的同胚映射 $\phi_\alpha: M_\alpha \rightarrow O_\alpha$ 。

- (iv) 任给 M_α, M_β 使得 $M_\alpha \cap M_\beta \neq \emptyset$ 则 $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: \phi_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta) \rightarrow \phi_\beta(M_\alpha \cap M_\beta)$ 作为 $\mathbb{R}^n$ 的子集上的映射是 C^∞ 的。

称满足 (ii)(iii)(iv) 的族 $\{(M_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 为坐标卡集 (atlas)，每个 (M_α, ϕ_α) 称为坐标卡 (charts)。

如果把 (iv) 中的 C^∞ 改为其它性质如 C, C^ω ，多项式，就就能得到 (拓扑) 流形，复流形，代数簇的定义。我们为了得到一些“更好”的流形，也可以在其中加一些定义。

我们需要给出这个定义的有效性，即它确实把我们想要的东西定义成了微分流形。

Example 1.0.2 (S^1 是流形)。首先把 S^1 参数化为 $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ 。构造两个坐标卡 (M, f) 和 (N, g) ，分别是

$$f^{-1}: (0, 2\pi) \rightarrow S^1, \quad \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$g^{-1}: (-\pi, \pi) \rightarrow S^1, \quad \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta).$$

$f^{-1}(0, 2\pi)$ 在 S^1 中的像为 $S^1 - \{(1, 0)\}$ ，而 $g^{-1}(-\pi, \pi)$ 在 S^1 中的像为 $S^1 - \{(-1, 0)\}$ ，从而

$$M = S^1 - \{(1, 0)\}, \quad N = S^1 - \{(-1, 0)\}.$$

显然 f, g 均是同胚, 而 $g \circ f^{-1}$ 是 $(0, 2\pi) \rightarrow (-\pi, \pi)$ 的 C^∞ 映射, 所以 $S^1 = M \cup N$ 满足流形的所有定义.

有了这个例子之后, 我们可以看微分流形 M 一般所具有的性质.

- (i),(ii),(iii) 导致 M “局部来看就是欧氏空间”, 比如 S^1 在每个点附近来看都像 $\mathbb{R}^1$, 但是整体不和 $\mathbb{R}^1$ 同胚 (这是需要证明的).
- (iv) 性质被称为**相容性**, 即 $M_\alpha \cap M_\beta$ 有两种参数化方式

$$\begin{array}{ccc} & M_\alpha \cap M_\beta & \\ \phi_\alpha \swarrow & & \searrow \phi_\beta \\ \phi_\alpha(M_\alpha \cap M_\beta) & & \phi_\beta(M_\alpha \cap M_\beta) \end{array}$$

下面一行的两个空间都落在 $\mathbb{R}^n$ 中, $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个**转移函数**. $\mathbb{R}^n$ 中多元微积分是一种局部性质, 我们关心的则是它拉回到流形 M 后所导致的结果.

上面的定义中出现了 n , 我们经常谈论“维数”的概念, 流形 M 的维数就定义为上面的 n . 但是这个定义存在一个问题: n 未必是良定义的, 至少我们需要证明 $\mathbb{R}^n$ 的维数为 n 这件事是良定义的 (注意到在 Vec 中这是容易证明的, 在 Top 中更难以说明), 这被称为维数的**拓扑不变性**.

Proposition 1.0.3. $\mathbb{R}^1$ 和 $\mathbb{R}^2$ 之间不存在同胚.

Proof. 假设存在同胚 $\alpha: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 把 $\mathbb{R}^1$ 去掉一点 (比如说 0), 剩下的区域 $\mathbb{R} - \{0\}$ 是不连通的. 但是 $\mathbb{R}^2$ 去掉任何一点 $\alpha(0)$ 仍然是连通的.

从不连通空间到连通空间的同胚不存在, 所以 α 不存在.



Remark. 事实上这是因为 π_0 是拓扑不变量. 根据 $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, 我们可以说明更高维的维数拓扑不变性.

(i) 中的空间的定义太广泛, 为了使其更加**简单**, 我们凑够现在开始, 要求 M 是 Hausdorff 空间. (定义中不用 Hausdorff 是为了定义的广泛性, 可以直接修改得到其它的定义)

我们还需要度量空间的定义. 对一个度量空间, 度量球 $S_x(\varepsilon) = \{y : d(x, y) < \varepsilon\}$ 可以诱导出 M 上的拓扑.

Example 1.0.4 (Riemann 流形). 度量张量 (g_{ij}) 刻画了 x 与 $x+dx$ 之间的距离:

$$ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j.$$

定义一条曲线 C 的长度为

$$L_{ab}(C) = \int_a^b g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dx^j}{dt} dt.$$

然后定义

$$d(a, b) = \inf_{C(t)} L_{ab}(C).$$

可以证明此时 M 构成一个度量空间.

我们都知道在 $\mathbb{R}^3$ 中可以构建环面, 或者说可以在 $\mathbb{R}^3$ 中将环面参数化; 但是我们还有一种建构环面的方式: 即 $T^2 = S^1 \times S^1$. 从拓扑上来说, 这两这没有任何区别, 但是从这两种定义上可以赋予 T^2 两种不同的度量. 直观上来说, $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ 是弯的, 但是 $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 是平的.