

Notes on Analysis III

FE enthusiast enthusiast

2025.09.09

课程概要

- 课程名：数学分析 III (Honor)
- 周课时：4+质量未知的双周习题课+不知道多久的课后整理
- 授课教师：杨诗武
- 给分方法：作业 40% + 期中 30% + 期末 30%，作业非 routine
- 课程大纲：
 - Fourier 级数与 Fourier 变换
 - 分布理论（广义函数）
 - Sobolev 空间和嵌入定理
- 参考资料：于品的数分讲义和自编讲义（但自编讲义并不完全可信，上面可能出现很严重的错误，无法作为一个很好的笔记参考资料.）

可能是最需要笔记整理的一门课……

Week 1: 2025/9/8 2025/9/10

1 Fourier 级数

本笔记参考了大量 thu 23 年分析讲义（于品改良版）里面的内容.

1.1 引入

Fourier 级数的研究来源于**偏微分方程**，具体来说，在物理中我们会自然地想要去求解关于“状态”的方程，其一个维度是位置，一个维度是时间. 这样就自然地导向 PDE 问题的一个求解. 比如下述的细导线上的热传导方程：

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + f. \quad (1)$$

其中 $u = u(t, x)$, $t \in [0, +\infty)$, $x \in [0, L]$, t 代表时间, x 代表在导线上所处位置 (导线长度为 L), u 代表 t 时刻 x 位置处的温度. 我们还需要一些额外的条件：

- 初值给定：零时刻的温度分布 u_0 被给定.
- 边值给定： $u(\cdot, 0) = u(\cdot, L) = 0$ ，它的物理意义是 u 两端保持在固定的温度.
- 最后我们不妨设 $f = 0$ ，即导线上没有热源，温度是自由扩散的.

我们再采用分离变量的方式来尝试求解 PDE，设 $u(t, x) = T(t)X(x)$ ，则 (1) 可化简为

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

固定 t 移动 x 会发现 $\frac{X''(x)}{X(x)}$ 取常值，再移动 t 会发现两边取相同的常值，即存在 c 使得同时有

$$X''(x) = c \cdot X(x), \quad T'(t) = c \cdot T(t).$$

这样问题就化归为了常微分方程的求解. 比如说 T 的解应当是

$$T(t) = A \cdot e^{ct}.$$

回忆 $X''(x) = c \cdot X(x)$ 这类方程的求解过程是通过把高阶导数转化为高维向量的一阶导数，即

$$\begin{pmatrix} X(x) \\ X'(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(x) \\ X'(x) \end{pmatrix}.$$

问题就转化为了 $\mathbf{X}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ 这种向量值的一阶常微分方程. 求解的方法是把矩阵 A 对角化（这也是我第一次看到线性代数的交叉应用，在 Artin Cpt 5 的后几章有）然后把它转化为一维的情形. 由于方程 $X''(x) = c \cdot X(x)$ 是线性的，故最后的解空间也具备线

性：函数空间可以自然地看作一个（当然是无穷维的）线性空间，解空间就是它的一个子空间。

根据边值限制， X 存在零点，这导致 X 的解应形如

$$A \cdot \cos(\lambda x) + B \cdot \sin(\lambda x).$$

其中 $\lambda^2 = -c$. 代入 $X(0) = X(L) = 0$ 后可知 $A = 0$ 并且 $\lambda L = k\pi$ 对某个整数 k 成立. 这给出 $c = -(k\pi/L)^2$, 从而

$$u(t, x) = \square \cdot e^{-(k\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

更一般地，由于偏微分方程 (1) 在 $f = 0$ 时的解也具有线性，所以从形式上来说，对不同的 k 对上式进行线性组合都可以得到一个满足 (1) 的解. 或者我们可以写成

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-(k\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

（注意从线性空间的角度来说， a_k 中应该只有有限项非零）我们想起 $u(t, x)$ 还需要满足初值条件 $u_0 = u(0, \cdot)$. 所以如果存在序列 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 使得

$$u_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

那么就可以模拟出 PDE 的一组解. 注意到这时候 $u_0(x)$ 必须是一个奇函数. 最后，当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $u(t, x) \rightarrow 0$, 这也符合我们的直观，即如果导线两端的温度固定为零，那么足够长时间后整个导线上温度都趋于 0. 我们称 $t \rightarrow +\infty$ 时 u 的解为方程的稳态解.

我们再来看另一个（个人认为适配性更强的）例子. 给定一个定义在圆周上的函数 f , 它能否成为调和函数的边界？即给定定义在 ∂D 上的函数 f , 是否存在 D 上的函数 u 使得

$$\begin{cases} \Delta u = 0; \\ u(x) = f(x), \quad x \in \partial D \end{cases} \quad ? \quad (2)$$

这个方程的求解实际上和上面一样也具有物理意义. 为此，我们先把上面的热传导方程推广到高维，高维版本中位置 x 被替换成 $\mathbb{R}^n$ 中的点，热方程中的 ∂_x^2 被替换成更一般的 Laplace 算子 Δ . 这样的话，圆盘上无热源的热传导方程被表述为

$$\partial_t u = \Delta u. \quad (3)$$

现在我们给定初值 u_0 和边值，注意此时边值不再是一维情形中“端点”上的值，而是一个定义在整个边界上的函数 f . 我们考虑足够长时间后方程的稳态解. 如果 $f \equiv 0$ 那么稳态解仍然为 $u \equiv 0$, 对一般的 f , 它的稳态解就是满足 (2) 的函数 u . 换句话说，从物理上只要给定边值 f , 就能够模拟出一组 (2) 的解，我们关注有没有具体把它表示出来的方式.

自然地, 我们通过极坐标来求解这个方程: 换元 $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$, 那么 v 应当满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} v = 0; \\ v(1, \theta) = g(\theta) := f(\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

仍然采用分离变量法, 设 $v(r, \theta) = a(r)b(\theta)$, 则条件化为

$$\begin{aligned} a''(r)b(\theta) + \frac{1}{r}a'(r)b(\theta) + \frac{1}{r^2}a(r)b''(\theta) &= 0. \\ \Rightarrow \frac{r^2 a''(r) + r a'(r)}{-a(r)} &= \frac{b''(\theta)}{b(\theta)}. \end{aligned}$$

这推出左右两边等于同一个定值, 即存在常数 c 使得

$$b''(\theta) = c \cdot b(\theta), \quad r^2 a''(r) + r a'(r) + c \cdot a(r) = 0.$$

我们注意到 θ 实际是在一个圆周 $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上定义的, 或者说如果把 θ 看成实变量, 所有以 θ 为变量的函数都应当以 2π 为周期. 我们会同时采用两种看法, 即我们谈论 θ 自动代表它所在的 $\text{mod } 2\pi$ 的等价类, 有时也会把函数自动认为是周期函数. 这里为了让函数 b 满足周期性, 选定 $c = -k^2, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, 那么 b 的解空间由周期函数 $\cos(k\theta)$ 和 $\sin(k\theta)$ 张成, 即

$$b(\theta) = A \cdot \cos(k\theta) + B \cdot \sin(k\theta).$$

当 $k = 0$ 时, $b(\theta)$ 的解是线性函数, 根据周期性只能是常值函数. 再来看关于 a 的方程, 注意到代入一个单项式之后方程是齐次的, 因此可以猜测解就是单项式. 严格来说, 可以换元 $r = e^s, \alpha(s) = a(e^s)$, 那么

$$\alpha'(s) = a'(e^s) \cdot e^s, \quad \alpha''(s) = a''(e^s) \cdot e^{2s} + a'(e^s) \cdot e^s.$$

因此关于 a 的方程实际上是

$$\alpha''(s) - k^2 \alpha(s) = 0.$$

它的解空间由 e^{ks} 和 e^{-ks} 生成, 即存在常数 C, D 使得

$$\alpha(s) = C \cdot e^{ks} + D \cdot e^{-ks}.$$

重新代回 $\alpha(s) = a(e^s)$ 可得 $a(r) = C \cdot r^k + D \cdot r^{-k}$. 根据实际意义 $r = 0$ 时函数值应当有限, 所以我们只考虑 $a(r) = C \cdot r^k$ 的情况. 特别地, 当 $k = 0$ 时这意味着 $a(r)$ 也需是常值函数.

从而, 根据 Laplace 算子的线性, $\Delta v = 0$ 的解空间包含以下一些函数张成的线性子空间:

$$v(r, \theta) = 1, \quad v(r, \theta) = r^k \cos(k\theta), \quad v(r, \theta) = r^k \sin(k\theta).$$

所以只要边值条件能够表示成这些函数在 $r = 1$ 时的一个线性组合

$$f(\theta) = A + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

就能给出 u 的一个形式解

$$v(r, \theta) = A + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (a_k r^k \cos(k\theta) + b_k r^k \sin(k\theta)).$$

这又是一个非常标准的“用三角级数表示解”的问题！

如果三角函数的出现仍然让人感到奇怪，这里还有一个更统一的表达形式。回忆在解 ODE 时解空间里会出现 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 的来源是如果在复值函数中考虑问题，解空间会由 $e^{i\theta}$ 和 $e^{-i\theta}$ 生成，在实值函数中投影产生了 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 。所以我们可以干脆直接考虑其复版本，这也有显而易见的好处：一方面是表达形式更统一了：

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\theta}, \quad u(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

另一方面，在进行微分积分相关的运算时 $e^{i\theta}$ 这种函数得到的结果相比三角函数是更自然的，这一点很快就会看到。

Definition 1.1.1 (Fourier 级数). 我们在圆周 $S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上定义如下两种 Fourier 级数：

- 实形式 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$.
- 复形式 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$.

由于圆周 S^1 是紧的，我们可以方便地考虑积分。不难注意到

$$\int_{S^1} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

其中 dx 是圆周上的子流形测度，它由覆叠 $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 所赋予，我们也可以看作是在实轴上某个长为 2π 的区间内作积分。

作为单位根求和的连续版本，它告诉我们 $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 满足某种正交性质：我们把函数空间看作线性空间，并在空间上定义内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{S^1} f(x) \overline{g(x)} \frac{dx}{2\pi},$$

那么 $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 可以自然地看作内积空间的一组标准正交基（这么说很明显有问题：一是线性组合是有限项组合，这里使用无限项求和，就已经超出了代数的范畴；二是我们只验证了它标准正交，还没有说明是一组基），而把 f 表示成 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ 可以通过正交分解

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, e^{ikx} \rangle e^{ikx}.$$

具体计算这个系数，就得到了著名的 Fourier 系数：

Definition 1.1.2 (Fourier 系数). 我们为可积函数 $f \in L^1(S^1, \mathbb{C})$ 定义其第 k 个 Fourier 系数为

$$\hat{f}(k) = \langle f, e^{ikx} \rangle = \int_{S^1} f(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi}.$$

并且我们说 f 对应的 Fourier 级数为

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

f 的可积性保证了 $|\hat{f}(k)|$ 拥有一致上界 $\|f\|_{L^1}$, 十分方便后续的讨论.

注意定义对 Lebesgue 可积函数进行, 这是因为 S^1 已经被赋予了好的测度 (鉴于积分里经常要除以 2π , 所以我们可以设 S^1 上的标准测度为 $d\xi = \frac{dx}{2\pi}$, 此时圆周的测度为 1, 相当于进行了等比放缩), 在这个测度空间上可以考虑积分, 也可以考虑各种 L^p space.

现在框架已经搭好了, 就是研究 f 与其 Fourier 级数之间的关系, 我们当然希望在级数的意义下其 Fourier 级数收敛到 f , 但是在逐点意义下这并不总对任何可积函数成立. 因此, 还需要进一步的分析:

- 我们可以更换不同的收敛模式来考虑这个问题. 比如把逐点收敛更换为几乎处处收敛, L^1 意义下收敛, 或者更强的一致收敛.
- 我们可以对不同正则性的函数来考虑这个问题. 比如把可积函数更换成 L^p 函数, 连续函数, α -Hölder 函数, 可微函数, 光滑函数; 或者增加有界之类的条件.
- 我们可以更换级数本身. 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 不收敛, 那么可以看看把它进行写操作后得到的级数是否收敛, 比如把 a_k 替换成前 k 项的平均数, 收敛速度会变快.
- 我们可以考虑系数序列. 直接看序列 $\{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 所具有的性质, 比如敛散性, 比如增长或下降的速度. 反过来, 我们也想知道从这个序列本身的性质能不能推得函数 f 所具有的一些性质 (在应用中由很大价值).
- 上面所述的“线性空间”理论能否被严格化, 从而可从线性代数的角度去考察函数问题, 提供了不同的视角.
-

1.2 Fourier 级数和卷积

我们首先来考虑 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$ 的逐点收敛性质. 我们先把它写成一个函数列收敛的形式, 设

$$S_N(f)(x) = \sum_{|k| \leq N} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

我们要研究的就是是否有 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f) = f$. 把 $S_N(f)$ 的表达式具体写开:

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{|k| \leq N} \int_{S^1} f(\theta) e^{-ik\theta} d\xi \cdot e^{ikx} \\ &= \int_{S^1} f(\theta) \left(\sum_{|k| \leq N} e^{ik(x-\theta)} \right) d\xi. \end{aligned}$$

设

$$D_N(f)(x) = \sum_{|k| \leq N} e^{ikx} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}},$$

则 $S_N(f)(x) = (f * D_N(f))(x)$, 其中卷积在测度 $d\xi$ 对应的积分下定义, 所以问题就转化为看是否有 $\lim_{N \rightarrow \infty} f * D_N(x) = f$. 我们回忆上学期学习恒同逼近核时提到过类似的概念, 即我们可以通过研究核 D_N 本身的性质来推出某些模式下的收敛, 这里 D_N 被称为 **Dirichlet 核**. 我们回忆一下 (一维情形中) 恒同逼近核的定义, 当然把命题改为 S^1 不影响任何事情.

Definition 1.2.1 (恒同逼近核). 我们说一族函数 $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+}$ 是一维的**恒同逼近核**, 如果它满足以下三个条件:

- $\int_{S^1} K_\varepsilon d\xi = \int_{S^1} K_\varepsilon \frac{dx}{2\pi} = 1$; (归一性)
- $|K_\varepsilon| \leq A \cdot \varepsilon^{-1}$; (广泛的小性)
- $|K_\varepsilon| \leq A \cdot \varepsilon |x|^{-2}$. (在远离原点处的小性)

恒同逼近核满足以下两个性质, 在上学期的笔记 P26 上有详细解释.

Proposition 1.2.2 (L^1 收敛). 如果 K_ε 是恒同逼近, 那么对任何 $f \in L^1(S^1)$, 均有 $K_\varepsilon * f$ 可积, 并且

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|K_\varepsilon * f - f\|_{L^1} = 0.$$

Proposition 1.2.3 (a.e.-逐点收敛). 如果 f 可积, K_ε 为恒同逼近, 则 f 在所有 Lebesgue 点处有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (K_\varepsilon * f)(x) = f(x).$$

特别地, 由于可积函数几乎所有点均是 Lebesgue 点, 所以 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (K_\varepsilon * f) \rightarrow f$, a.e.

可惜的是 $D_N(f)$ 不是一个好的恒同逼近核, 虽然对它沿 S^1 积分后是 1, 但是它是快速震荡的, 所以在原点之外没有关于 θ 的小性.

其次, 恒同逼近核的概念太强, 它在 Lebesgue 点附近都能得到收敛性质, 稍弱一些的我们可以考虑下面积分核的概念. (也称为 good kernel, 顺带一提实分析教材中两者引入顺序似乎是反过来的?)

Definition 1.2.4 (积分核). 给定 S^1 上的一族连续函数 $K_N(x)$, 如果它满足

(i) K_N 是概率密度, 即 $\int_{S^1} K_N(x) d\xi = 1$;

(ii) K_N 在 $L^1(S^1)$ 上一致有界, 即存在常数 $M > 0$ 使得

$$\int_{S^1} |K_N(x)| d\xi \leq M, \quad \forall n \geq 0.$$

(iii) 当 $N \rightarrow +\infty$ 时, $\{K_N\}_{N \geq 0}$ 主要集中在 $x = 0$ 附近, 即对任意 $\delta > 0$, 均有

$$\int_{S^1 \setminus (-\delta, \delta)} |K_N(x)| d\xi \rightarrow 0.$$

称 $\{K_N(x)\}$ 是 S^1 上的一族好的积分核.

换句话说, 我们只希望在积分的意义下有小性就可以了. 实际上, 我们可以证明恒同逼近核一定是积分核. 但是 Dirichlet 核甚至也不是积分核: 它不满足 (ii)(iii) 这两条性质. 为了让震荡频率减弱下来, 我们采用 Césaro 求和: 定义

$$\sigma_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f).$$

并考虑是否有 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f) = f$ 成立. 根据线性, $\sigma_N(f)$ 的收敛性也能被转化为一个卷积, 并且卷积核也可以如下表示:

$$F_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(f) = \sum_{|k| \leq N-1} (N - |k|) e^{ikx} = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \frac{N}{2} \theta}{\sin \frac{1}{2} \theta} \right)^2.$$

注意 $\theta \rightarrow 0$ 时确实有 $F_N(f) \rightarrow N$. 由于这个核有一个 N 的控制, 我们可以证明这是一个好核.

Proposition 1.2.5. $\{F_N(f)\}_{N \geq 1}$ 是一族好核.

- (i) 可以直接通过线性得到:

$$\int_{S^1} F_N(f) d\xi = \int_{S^1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f) d\xi = \frac{1}{N} \cdot N = 1.$$

- (ii) 显然, 因为 $F_N(f)$ 是非负的, 所以

$$\int_{S^1} |F_N(f)| d\xi = \int_{S^1} F_N(f) d\xi = 1.$$

注意 $D_N(f)$ 就不是非负的!

- (iii) 在 $\theta \in S^1 \setminus (-\delta, \delta)$ 时, $|\sin \frac{1}{2} \theta|$ 有一个非平凡的下界 $\sin \frac{1}{2} \delta$. 这导致我们可以直接放缩

$$F_N(f) \leq \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2} \delta} \right)^2.$$

对它积分后令 $N \rightarrow \infty$ 当然趋于 0.

所以 Fejer 核是一个好核 (积分核)! 我们广泛地证明好核有以下两个对应于恒同逼近核的收敛性质成立:

Theorem 1.2.6 (L^1 收敛). 如果 $\{K_N\}$ 是好的积分核, 那么对任何 $f \in L^1(S^1)$, 均有 $K_N * f$ 可积, 并且

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|K_N * f - f\|_{L^1} = 0.$$

Proof. 直接进行计算:

$$\begin{aligned} (K_N * f - f)(x) &= \left(\int_{S^1} K_N(\theta) f(x - \theta) d\xi \right) - f(x) \\ &= \int_{S^1} K_N(\theta) (f(x - \theta) - f(x)) d\xi. \end{aligned}$$

第二个等号用到了积分核的第一个性质. 两边对 x 积分:

$$\begin{aligned} \|K_N * f - f\|_{L^1} &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{S^1} \int_{S^1} |K_N(\theta)| |f(x - \theta) - f(x)| d\theta dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} |K_N(\theta)| \|\tau_{-\theta} f - f\|_{L^1} d\theta. \end{aligned}$$

其中 $\tau_{-\theta} f(x) = f(x - \theta)$. 由于 f 是可积函数, 我们知道

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \|\tau_{-\theta} f - f\|_{L^1} = 0.$$

从而可以进行截断估计. 对任意 $\varepsilon > 0$ 取 δ 使得对任意 $|\theta| \leq \delta$ 均有 $\|\tau_{-\theta} f - f\|_{L^1} < \varepsilon$, 又根据 f 的可积性存在一致常数 P 使得对任意 θ 均有 $\|\tau_{-\theta} f - f\|_{L^1} < P$.

$$\begin{aligned} \|K_N * f - f\|_{L^1} &\leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon \cdot \int_{(-\delta, \delta)} |K_N(\theta)| d\theta + \frac{1}{2\pi} P \cdot \int_{S^1 \setminus (-\delta, \delta)} |K_N(\theta)| d\theta \\ &\leq \varepsilon M + P \cdot \int_{S^1 \setminus (-\delta, \delta)} |K_N(\theta)| d\xi. \end{aligned}$$

这用到了积分核的第二个性. 令 $N \rightarrow \infty$ 可根据第三个性得到右边这项 $\rightarrow 0$, 然后再根据 ε 的任意性就可以得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|K_N * f - f\|_{L^1} = 0.$$

证毕.



Theorem 1.2.7 (连续点处的逐点收敛). 如果 $\{K_N(x)\}$ 是好的积分核, $f \in L^1(S^1)$ 且在 S^1 上一致有界, 那么在 f 的连续点 x 处有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f * K_N(x) = f(x).$$

Proof. 做法和上面完全类似, 只不过这次对单点估计: 如果 x 是连续点, 那么对任意 $\varepsilon_f > 0$ 都存在 δ 使得对任意 $|y| \leq \delta$ 均有 $|f(x - y) - f(x)| \leq \varepsilon_f$. 再设 $|f|$ 在 S^1

上的一致上界为 P .

$$\begin{aligned}
 |f * K_N(x) - f(x)| &= \left| \int_{S^1} (f(x-y) - f(x)) K_N(y) d\xi \right| \\
 &\leq \int_{|y| \leq \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_N(y)| d\xi \\
 &\quad + \int_{S^1 \setminus (-\delta, \delta)} |f(x-y) - f(x)| |K_N(y)| d\xi \\
 &\leq \varepsilon_f \cdot \int_{(-\delta, \delta)} |K_N(y)| d\xi + 2P \cdot \int_{S^1 \setminus (-\delta, \delta)} |K_N(y)| d\xi.
 \end{aligned}$$

根据积分核的后两条性质, 令 $N \rightarrow \infty$ 可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |f * K_N(x) - f(x)| \leq \varepsilon_f \cdot M.$$

再根据 ε_f 的任意性即得结论. $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

Corollary 1.2.8 ($C^0 \rightarrow \sigma_N(f)$ 一致收敛). 对 $f \in C^0(S^1)$, 有一致收敛 $f * F_N \rightrightarrows f$, 即

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f * F_N - f\|_{L^\infty} = 0.$$

从而 $\sigma_N(f)$ 一致收敛到 f .

Proof. 由于 S^1 是紧的, 所以连续性自动推出一致有界性, 从而根据上面的定理推得逐点收敛性. 回忆上面的证明, 由于 S^1 上的连续可推出一致连续, 所以可以选择一个一致的 δ 使得对任意 $x \in S^1$ 和 $|y| \leq \delta$ 均有 $|f(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon_f$. 这就导致上面证明中逐点放缩可以替换成一致的放缩.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f * K_N(x) - f(x)\|_{L^\infty} \leq \varepsilon_f \cdot M.$$

这就推得了一致收敛性成立. $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

Corollary 1.2.9 (Weierstrass). 任意连续函数 $f \in C^0(S^1)$ 都可以一列三角多项式一致逼近. 或者说, 三角多项式在 $(C(S^1), \|\cdot\|_{L^\infty})$ 上稠密.

Proof. 这是因为如果我们展开 $\sigma_N(f)$ 就会发现它是一个有限项三角函数求和.

$$\sigma_N(f)(x) = \sum_{|k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

而对实值函数 f 有 $\widehat{f(-n)} = \overline{\widehat{f(n)}}$. 所以可以验证 $\sigma_N(f)$ 是实系数的三角多项式. $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

Remark. 我们可以用这个命题重新证明多项式版本的 Weierstrass 定理, 那个定理是对 $f \in C^0([a, b])$ 进行的, 我们把它的定义域平移到半圆周上, 然后用 Tietze 扩张定理连续延拓到整个 S^1 上. 最后我们可以把三角多项式写成级数的形式, 显然它可以用多项式一致逼近, 就完成了证明.

当然, 我们还可以证明 $F_N(f)$ 是恒同逼近核, 以得到更强的性质.

Proposition 1.2.10. $\{F_N(f)\}_{N \geq 1}$ 是一族恒同逼近核.

Proof. 只需证明后两条. 首先 $\frac{\sin \frac{N}{2}\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta}$ 在 S^1 上只有可去间断点, 因此存在上界, 所以满足第二条性质. 又因为存在 c 使得 $|\sin \frac{1}{2}\theta| \geq |\theta|$ 成立, 把它放掉就得到一个二次的控制.

$$\frac{1}{N} \left(\frac{\sin \frac{N}{2}\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right)^2 \leq \frac{1}{N} \frac{1}{\frac{c}{2}\theta} = A \cdot \frac{1}{N\theta^2}.$$

注意到 Dirichlet 核只能给出一阶的控制, 从而不是恒同逼近核. $\left\langle \frac{1}{x} \right\rangle$

Corollary 1.2.11 (a.e.-逐点收敛). 对任意 S^1 上的可积函数 f , 均有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f) = f, \quad \text{a.e.}$$

1.3 Dirichlet 核与逐点收敛性

我们先从比较好的函数说起. 要想 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$ 收敛到 f , 首先我们需要它收敛, 一个非常直观的充分条件就是级数绝对收敛, 即 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < +\infty$. 这时如果 $f \in C(S^1)$ 就能推出一致收敛.

Proposition 1.3.1. 如果 $f \in C(S^1)$ 并且 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < +\infty$, 那么 f 对应的 Fourier 级数一致收敛到 f , 即 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} \Rightarrow f(x)$.

Proof. 首先我们证明 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$ 一致收敛到一个函数, 这和 Fourier 理论无关. 只需证明 $S_N(f)$ 是 L^∞ 空间中的 Cauchy 列. 对任意 $q > p \geq N$, 我们有

$$\|S_p(f) - S_q(f)\|_{L^\infty} = \left\| \sum_{p < |k| \leq q} \hat{f}(k) e^{ikx} \right\|_{L^\infty} \leq \sum_{p < |k| \leq q} |\hat{f}(k)| \leq \sum_{|k| \geq N} |\hat{f}(k)|.$$

后者在 $N \rightarrow +\infty$ 时显然 $\rightarrow 0$, 所以我们可以设 $S_N(f) \Rightarrow g$. 接下来证明很有意思: 我们可以研究 g 的 Fourier 级数, 并证明系数序列也是 $\{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. 证明很简单, 因为

$$\langle S_N(f), e^{ikx} \rangle = \int \sum_{|m| \leq N} \hat{f}(m) e^{imx} \cdot e^{-ikx} d\xi = \hat{f}(k)$$

对一切 $N \geq k$ 成立, 所以两边取极限就可知 $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$. 于是我们需要一个引理. $\left\langle \frac{1}{x} \right\rangle$

Lemma 1.3.2 (Fourier 系数的唯一性). 如果 $f \in L^1(S^1)$ 满足 $\hat{f}(k) = 0$ 对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 成立, 那么 $f = 0$, a.e. 也即在 L^1 空间中有 $f = 0$.

Proof. 根据题意, $\int_{S^1} f(x)e^{-ikx} d\xi = 0$ 对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 成立. 对任意连续函数 $h \in C^0(S^1)$, 根据推论 1.2.9, 对任意 N 均有

$$\int_{S^1} f(x)\sigma_N(h)(x) d\xi = 0.$$

从而根据 $\sigma_N(h)(x) \rightrightarrows h$ 和 $f \in L^1$ 可知 $\int_{S^1} f(x)h(x) dx = 0$. 再根据连续函数在 L^1 空间中稠密, 可取一系列连续函数逼近 f , 从而得到 $\int_{S^1} f^2(x) d\xi = 0$, 这给出 $f(x) = 0, \text{a.e.}$ 证毕. $\square$

Remark. 我们这里没有循环论证, 一句话来说相当于“三角多项式在 C^0 中稠密, 而 C^0 又在 L^1 中稠密”来推出需证的命题.

回到原题, 根据 f, g 的连续性可知 $f = g$, 从而 $S_N(f) \rightrightarrows f$, 证毕. $\square$

Remark. 上面的证明其实也可以在 $f \in L^1(S^1)$ 时进行, 此时级数一致收敛到的函数 g 满足 $f = g, \text{a.e.}$ 特别地, 这给出 f 和一个连续函数几乎处处相等, 这对于可积函数来说是非平凡的.

但是即使在 $f \in C^0$ 时, Fourier 级数也可以在单点处有很坏的性质, 下面的 du Bois-Reymond 反例就是一个 Fourier 级数在 0 处不收敛的连续函数的例子.

Example 1.3.3 (du Bois-Reymond). 构造的大概想法是这样的:

- 我们把 Fourier 级数比作一些“波”的叠加, 我们现在构造一个函数 f , 它不是波的叠加, 而是所谓“波包”的叠加. 我们让波包内部是震荡的, 但波包整体是收敛的. 这样对波包叠加后得到的级数 f 收敛, 但是如果把它用 Fourier 系数分解成波, 就会受到内部震荡的影响, 从而导致 Fourier 级数不是收敛的.

具体而言, 一个波包是说

$$W_K(x) = e^{i(2K)x} \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

整体来看, 类似 Abel 求和的想法, 我们可以推得当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} (e^{ix} + \cdots + e^{ikx}) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ix}}{e^{ix} - 1} \cdot \frac{1}{k(k+1)} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{|e^{ix} - 1|} \cdot \frac{1}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

其中 $x \neq 0$ 时 $e^{ix} - 1$ 是非零常值. 这意味着, 存在一个仅和 x 有关的常数 $C(x)$, 使得

$$|W_K(x)| < C(x), \quad \forall K \in \mathbb{N}^*.$$

当 $x = 0$ 时正负抵消, 我们直接有 $W_K(0) = 0$, 从而也是满足上式的. 定义

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \cdot W_{K_l}(x).$$

那么在每点处, $f(x)$ 都是绝对收敛的级数, 并且可以证明函数项级数收敛到一个连续函数 f .

接下来我们更细地去看每一个波包. 首先我们选取 K_{l+1} 远大于 K_l 从而使得每个波包是不交的, 这能够立即让我们写出 f 对应的 Fourier 系数: 如果对某个 l 有 $k = K_l + c$ 那么 $\hat{f}(k) = \frac{1}{l^2 c}$. 现在我们来考虑 $S_{2K_l}(f)(0) = \frac{1}{l^2} \sum_{|k| \leq 2K_l} \hat{f}(k)$: 第 l 个波包之前的频率已经完全抵消了, 第 l 个波包恰好经过了一半, 频率之和恰好是调和级数 $-\frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^{K_l} i^{-1}$. 但我们知道调和级数是发散的, 差不多是 $\log K_l$ 这个量级, 所以我们只需要取 K_l 足够大使得比如说 $\log K_l > l^3$, 那么就可以让 $S_{2K_l}(f)(0)$ 发散, 进而使 Fourier 级数在 0 处不收敛.

Dirichlet 核与 Fejer 核最大的区别在于它不是恒正的, 从而只能通过震荡来在积分层面上控制函数. 这样的想法当然能让我们联想到经典的 Riemann-Lebesgue 引理.

Theorem 1.3.4 (Riemann-Lebesgue). 对任意正长度区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 和 $f \in L^1([a, b])$, 均有

$$\lim_{|N| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{iNx} dx = 0.$$

Proof. 想法是进行逼近, 我们注意到 $C^1([a, b])$ 在 L^1 空间中是稠密的, 先对 C^1 函数证明结论:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{iNx} dx &= \frac{1}{iN} \int_a^b f(x) (e^{iNx})' dx \\ &= \frac{1}{iN} \left((f(x) e^{iNx}) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) e^{iNx} dx \right). \end{aligned}$$

我们直接取模长, 那么第一项模长小于等于 $|f(a)| + |f(b)|$, 根据 C^1 性 $f'(x)$ 也是可积的, 因此第二个积分的模长也存在上界, 令 $|N| \rightarrow \infty$ 当然得到极限为 0.

剩下的部分完全就是逼近. 只需注意到

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{iNx} dx \right| &\leq \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) e^{iNx} dx \right| + \left| \int_a^b g(x) e^{iNx} dx \right| \\ &\leq \|f - g\|_{L^1} + \left| \int_a^b g(x) e^{iNx} dx \right| \end{aligned}$$

然后取 $g \in C^1$ 使得 $\|f - g\|_{L^1}$ 足够小即可.



这当然可以推出对 S^1 上的可积函数有类似的事情成立, 然后取实虚部又可知结论对三角函数成立.

Corollary 1.3.5 (Fourier 系数归零). 对任意 $f \in L^1(S^1)$, 均有 $\lim_{|N| \rightarrow \infty} \widehat{f}(N) = 0$, 即 Fourier 系数最终会趋于零.

上面的证明也指出, 当 f 的正则性更好时, 用分部积分可以推得更强的收敛性质. 事实上 f 和 f' 的 Fourier 系数有如下关系:

Proposition 1.3.6. 如果 $f \in C^1(S^1)$, 记 $g = f' \in C^0(S^1)$. 则

$$\widehat{g}(n) = \mathbf{i}n \widehat{f}(n)$$

特别地由于 Fourier 系数总是一致有界的, 我们可以得到 $\widehat{f}(n) = O(n^{-1})$. 更一般地, 当 $f \in C^k(S^1)$ 时 $\widehat{f}(n) = O(n^{-k})$. 每多一阶可微性, Fourier 系数的衰减就快一阶.

Proof. 因为 S^1 是闭流形, 计算边界时候会直接 vanish 掉, 所以当 $N \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{S^1} f(x) e^{-\mathbf{i}Nx} d\xi &= \frac{1}{-\mathbf{i}N} f(x) (e^{-\mathbf{i}Nx})' d\xi = \frac{1}{-\mathbf{i}N} \cdot - \int_{S^1} f'(x) e^{-\mathbf{i}Nx} d\xi \\ &= \frac{1}{\mathbf{i}N} \cdot \widehat{g}(N). \end{aligned}$$

当 $N = 0$ 时自然有 $\int_{S^1} f'(x) d\xi = 0$, 这就完成了证明. $\square$

有一个自然的问题是, 是否对每个序列 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 都能找到一个可积函数 $f \in L^1(S^1)$ 使得 $\{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$? 根据定理 1.3.4 和 1.1.2, 我们知道 a_k 必须有界且 $\lim_{|k| \rightarrow \infty} a_k = 0$. 但是这足够吗? 下面一个非常技巧性的手法给出了另一个广泛满足的性质, 所以这个问题并非简单.

Example 1.3.7 (原函数的 Fourier 级数). 我们知道 S^1 上函数 f 存在原函数当且仅当 $\int_{S^1} f d\xi = 0$, 这样我们可以从 0 开始比如说定义

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

那么确实有 $F(0) = F(2\pi)$, 即定义是良好的. 利用 Fubini 定理, 我们可以计算 $\widehat{F}$ 的 Fourier 系数.

$$\begin{aligned} \widehat{F}(0) &= \int_{S^1} \left(\int_0^x f(t) dt \right) d\xi_x = \int_{S^1} (2\pi - x) f(x) d\xi_x \\ &= - \int_{S^1} x f(x) d\xi_x, \\ \widehat{F}(k) &= \int_{S^1} \left(\int_0^x f(t) dt \right) e^{-\mathbf{i}kx} d\xi_x = \int_{S^1} \left(\int_t^{2\pi} e^{-\mathbf{i}kx} dx \right) f(t) d\xi_t \\ &= \int_{S^1} \left(\frac{1}{-\mathbf{i}k} e^{-\mathbf{i}kx} \Big|_t^{2\pi} \right) f(t) d\xi_t = \frac{1}{\mathbf{i}k} \int_{S^1} e^{-\mathbf{i}kt} f(t) d\xi_t \\ &= \frac{1}{\mathbf{i}k} \widehat{f}(k). \end{aligned}$$

注意当 $k \neq 0$ 时, 这和“求导运算”给出的 Fourier 系数之间的关系是吻合的. 对原函数利用 Féjer 核一致收敛性 1.2.8, 得到一个不平凡的结果:

$$\begin{aligned}\sigma_N(F)(x) &= \sum_{|k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \widehat{F}(k) e^{ikx} \\ &= \widehat{F}(0) + \sum_{1 \leq |k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \cdot \frac{1}{ik} \widehat{f}(k) e^{ikx} \\ &= \widehat{F}(0) + \sum_{1 \leq |k| \leq N} \frac{\widehat{f}(k)}{ik} e^{ikx} - \sum_{1 \leq |k| \leq N} \frac{|k|}{iNk} \widehat{f}(k) e^{ikx}.\end{aligned}$$

令 $N \rightarrow \infty$, 左边就一致收敛到 $F(x)$. 此时, 由 $\lim_{N \rightarrow \infty} |\widehat{f}(k)| \rightarrow 0$ 容易得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq |k| \leq N} |\widehat{f}(k)| \rightarrow 0.$$

因此上式可化简为

$$F(x) = \widehat{F}(0) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq |k| \leq N} \frac{\widehat{f}(k)}{ik} e^{ikx}.$$

令 $x = 0$, 根据 $F(0) = 0$, 上式可转化为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{1 \leq |k| \leq N} \frac{\widehat{f}(k)}{k} \right) = -i\widehat{F}(0) = i \int_{S^1} x f(x) d\xi.$$

由 f 可积可得 $xf(x)$ (在 S^1 上可积), 因而

$$\sum_{|k| \geq 1} \frac{\widehat{f}(k)}{k}$$

极限存在, 这给出了不同于之前的一条限制, 比如当 $a_k \sim \frac{1}{\log|k|}$ 时, 就不存在适配的一个 f , 因为 $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k \log k}$ 发散.

Week 2:2025/9/15 2025/9/17

下面证明 Dirichlet 核有类似 Riemann-Lebesgue 引理的性质.

Lemma 1.3.8 (局部化引理). 设 $f \in L^1(S^1)$, 则对任意 $x \in S^1$ 以及 $\delta > 0$, 有

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} D_N(y) f(x-y) dy = 0.$$

Proof. 我们把问题转化为 Riemann-Lebesgue 引理.

$$\begin{aligned} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} D_N(y) f(x-y) dy &= \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}} f(x-y) dy \\ &= \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \sin(N + \frac{1}{2})y \cdot \frac{f(x-y)}{\sin \frac{y}{2}} dy. \end{aligned}$$

注意到当 $\delta \leq |y| \leq \pi$ 时 $\sin \frac{y}{2}$ 有一致下界 $\sin \frac{\delta}{2}$, 从而使 $\frac{f(x-y)}{\sin \frac{y}{2}} \in L^1$, 利用 Riemann-Lebesgue 引理即得结论. $\square$

上面的命题告诉我们, Dirichlet 卷积后的结果只和它很小一个范围内的积分有关,

$$f * D_N = \int_{|y| \leq \delta} D_N(y) f(x-y) dy + \int_{|y| \geq \delta} D_N(y) f(x-y) dy$$

后者在 $N \rightarrow +\infty$ 的意义下 $\rightarrow 0$, 我们希望前者在 $N \rightarrow \infty$ 时是收敛的. 由于只需要在 y 很小的情况下讨论, 所以 $(\sin \frac{y}{2})^{-1}$ 可以归结为对 $2y^{-1}$ 的讨论, 即: 只要 f 的正则性可以让 $y^{-1}f(x-y)$ 变得可积, $S_N(f)(x)$ 就有收敛点. 这可以总结成如下的定理:

Theorem 1.3.9 (Dini). 设 f 在 S^1 上可积, 并且存在常数 c 以及 $\delta > 0$ 使得在 x_0 处有

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2c|}{t} dt < +\infty,$$

那么 $S_N(f)(x_0)$ 收敛到一点, 且 $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x_0) = c$.

这个命题大概是说, 只需要 c 和 $\frac{1}{2}(f(x_0+t) + f(x_0-t))$ 足够接近, 其误差关于 $\frac{1}{t} dt$ 可积, 就可以良好地给出收敛性.

Proof. 我们首先利用局部化引理, 把 $(-\delta, \delta)$ 之外的部分排除.

$$\begin{aligned} S_N(f)(x_0) - c &= \int_{S^1} D_N(y) f(x-y) \frac{dy}{2\pi} - c = \int_{S^1} D_N(y) (f(x-y) - c) \frac{dy}{2\pi} \\ &= \int_{-\delta}^\delta D_N(y) (f(x-y) - c) \frac{dy}{2\pi} + \int_{|y| \geq \delta} D_N(y) (f(x-y) - c) \frac{dy}{2\pi}. \end{aligned}$$

我们已经证明了

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\left| \int_{|y| \geq \delta} D_N(y) f(x-y) \frac{dy}{2\pi} \right| + \left| c \cdot \int_{|y| \geq \delta} D_N(y) \frac{dy}{2\pi} \right| \right) = 0.$$

然后根据 $D_N(y) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{1}{2}y}$ 的偶性, 积分就能化为

$$\begin{aligned}\int_{-\delta}^{\delta} D_N(y)(f(x-y)-c)\frac{dy}{2\pi} &= \int_0^{\delta} D_N(y)(f(x-y)+f(x+y)-2c)\frac{dy}{2\pi} \\ &= \int_0^{\delta} \sin(N+\frac{1}{2})y \cdot \frac{f(x-y)+f(x+y)-2c}{\sin\frac{1}{2}y} \frac{dy}{2\pi}.\end{aligned}$$

根据条件, 右边的函数是可积的 (存在 $\square$ 使得 $\sin\frac{1}{2}y \geq \square \cdot y$ 对 $y \in [0, \delta)$ 成立), 因此使用 Riemann-Lebesgue 引理就能完成证明. $\square$

它的一个推论是下述结果:

Proposition 1.3.10. 如果存在常数 $0 < \alpha \leq 1$, $\delta > 0$ 以及 c_+, c_- 使得

$$|f(x_0+t)-c_+|+|f(x_0-t)-c_-| \leq C \cdot t^\alpha, \quad \forall t \in (0, \delta),$$

那么 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{c_++c_-}{2}$.

Proof. 条件直接推出

$$\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-c_+-c_-|}{t} \leq C \cdot t^{\alpha-1}.$$

当 $\alpha-1 \in (-1, 0]$ 时, $t^{\alpha-1}$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 于是 Dini 定理 1.3.9 的条件满足, 于是收敛性成立. $\square$

Corollary 1.3.11. 对任意 $f \in C^\alpha(S^1)$, $0 < \alpha \leq 1$ 均有 $S_N(f)$ 逐点收敛到 f . 其中 $C^\alpha(S^1)$ 表达的是 S^1 上的 α -Hölder 连续函数.

实际上还能证明更强的命题成立, 逐点收敛可以被替换成一致收敛 $S_N(f) \Rightarrow f$! Bernstein 证明了 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时的情形, 证明很有调和分析的味道, 进行二进分拆估计 (上学期证明一个命题时也用到).

Theorem 1.3.12 (Bernstein). 对 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ 及任意 S^1 上的 C^α -Hölder 连续函数 f , 其 Fourier 系数绝对收敛到 f .

Proof. 我们的目标是证明 $\sum |\widehat{f}(k)| < +\infty$, 从而根据命题 1.3.1 可推得一致收敛性. 根据逐点收敛的结论我们有

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

则对任意 $h \in \mathbb{R}$, 有

$$f(x+h)-f(x-h) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikx} 2i \sin(kh).$$

固定 h , 将其看成一个新的关于 x 的函数, 其第 k 个 Fourier 系数是 $2i \sin(kh) \widehat{f}(k)$. 从而根据 Parseval 恒等式 (我也不知道 ysw 为什么的编排方式为什么会在没讲它的时候证明这个命题?):

$$\|f(x+h)-f(x-h)\|_{L^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |2i \sin(kh) \widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 4 |\widehat{f}(k)|^2 |\sin(kh)|^2. \quad (1)$$

另一方面, 根据 C^α 收敛性质, $f(x+h) - f(x-h) \leq C \cdot |h|^\alpha$, 所以存在常数 C 使得

$$\|f(x+h) - f(x-h)\|_{L^2} \leq C \cdot |h|^{2\alpha}. \quad (2)$$

(1)(2) 结合得到一个关于 $\sum |\hat{f}(k)|^2$ 和 h 的不等式, 并且 h 可以自取. 接下来进行二进分拆, 根据

$$\sin \frac{k\pi}{2^{p+1}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \forall k \in [2^{p-1}, 2^p);$$

令 $h = \frac{\pi}{2^{p+1}}$, 把 $[2^{p-1}, 2^p)$ 以外含 k 的项都放为 0:

$$C \cdot \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2(p+1)\alpha}} \geq \sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} \left(\sin \frac{k\pi}{2^{p+1}} \right)^2 |\hat{f}(k)|^2 \geq \sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} \frac{1}{2} |\hat{f}(k)|^2.$$

然后把平方放成线性和:

$$\left(\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} |\hat{f}(k)| \right)^2 \leq 2^{p-1} \left(\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} |\hat{f}(k)|^2 \right) \leq 2^{(1-2\alpha)p-2\alpha} \pi^{2\alpha}.$$

当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时和 p 有关的求和是收敛的. 即

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| &= |\hat{f}(0)| + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} |\hat{f}(k)| \right) \\ &\leq |\hat{f}(0)| + \sum_{p=1}^{\infty} 2^{\frac{1-2\alpha}{2}p-\alpha} \pi^\alpha \\ &\leq |\hat{f}(0)| + 2^{-\alpha} \pi^\alpha \frac{2^{\frac{1-2\alpha}{2}}}{1 - 2^{\frac{1-2\alpha}{2}}} < +\infty. \end{aligned}$$

证毕. $\square$

当 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ 时, 如果 f 具有有界变差性 (从而可以放出另一个界), 仍然可以得到绝对收敛.

Proposition 1.3.13 (Zygmund). 对 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ 以及任意 S^1 上的 C^α -Hölder 连续函数 f , 如果 f 还是有界变差函数, 那么其 Fourier 系数一致收敛到 f .

最后我们来看有界变差函数, 或者说单调函数的 Fourier 级数收敛性. 我们知道有界变差函数总是 L^1 的, 并且每点的左右极限均存在. (直接利用有界变差函数能被写为两个单调函数之差即可) 可以猜到结论是如下的 Jordan 定理:

Theorem 1.3.14 (Jordan). 给定有界变差函数 $f \in BV(S^1)$, 则对任意 $x_0 \in S^1$ 均有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2}.$$

Proof. 首先把问题还剩下积分形式:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{S^1} D_N(y) \left(f(x_0 - y) - \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2} \right) d\xi = 0.$$

根据局部化引理 1.3.8, 只需证明存在 $\delta > 0$ 使得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{(-\delta, \delta)} D_N(y) \left(f(x_0 - y) - \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2} \right) \frac{dy}{2\pi} = 0.$$

根据 $D_N(y)$ 的偶性, 上式可转化为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\delta D_N(y) (f(x_0 + y) + f(x_0 - y) - f^+(x_0) - f^-(x_0)) \frac{dy}{2\pi} = 0$$

从而根据对称性只需证 (注意到 $f^+(x_0)$ 只和 x_0^+ 附近的值有关, 两边独立)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\delta D_N(y) (f(x_0 + y) - f^+(x_0)) \frac{dy}{2\pi} = 0. \quad (1)$$

接下来注意到 (1) 式关于函数 f 是线性的, 而根据有界变差函数的结构定理可知 f 能写成两个单调函数的差, 因此我们只需对单调函数证明 (1) 即可. (严格来说 S^1 上没法定义单调函数, 只有在局部上讨论时才能这么看) 记 $g(y) = f(x_0 + y) - f^+(x_0)$, 那么 $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = 0$. 并且 g 是单调增函数. 现在我们把 $D_n(y)$ 的具体表达式写出来, (1) 就转化为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{1}{2}y} g(y) \frac{dy}{2\pi} = 0.$$

当 δ 足够小时 $\sin \frac{1}{2}y$ 是单调的, 我们希望把它严格地换成 $\frac{1}{2}y$. 利用下述不等式:

$$\frac{2}{y} \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}y} \leq \frac{2}{y} + \frac{y}{6}, \quad \forall 0 < y \leq \pi.$$

从而

$$\int_0^\delta \sin \left((N + \frac{1}{2})y \right) g(y) \left| \frac{1}{\sin \frac{1}{2}y} - \frac{2}{y} \right| dy \leq \int_0^\delta \frac{y}{6} g(y) dy \leq \frac{\delta^2}{6} g(\delta).$$

这就说明了把 $\sin \frac{1}{2}y$ 替换成 $\frac{1}{2}y$ 后得到的结果接近. 接下来利用第二积分中值定理: 由于 $g(y)$ 非负单调, 故存在 $c \in [0, \delta]$ 使得

$$\int_0^\delta \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{y} g(y) dy = g(\delta) \int_c^\delta \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{y} dy.$$

进一步地,

$$\int_c^\delta \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{y} dy = \int_{(N + \frac{1}{2})c}^{(N + \frac{1}{2})\delta} \frac{\sin t}{t} dt.$$

而函数 $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ 是有界的, 所以上式存在一致上界, 综上存在一致常数 M 使得

$$\left| \int_0^\delta D_N(y) g(y) \frac{dy}{2\pi} \right| \leq M \cdot g(\delta)$$

成立. 根据 δ 选取的任意性就可知上式只能为 0, 证毕.



1.4 L^p 空间和 Fourier 级数

对任意测度空间 $(X, \mathcal{F}, \mu)$, 除了 L^1 之外还可以定义 L^p 空间的概念. L^p 空间是线性的 Banach 空间. 对 $1 < p < +\infty$, 可以定义

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

那么 L^p 空间就是在 a.e. 相等的意义下所有 L^p 范数有限的函数构成的空间. 可以证明 Minkovski 不等式 $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ 成立, 因而良好定义了一个范数. 当 $p = +\infty$ 时, 可以定义 L^∞ 空间, 其范数为本性上界

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{M \mid m(\{x : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

根据 Hölder 不等式, $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$ 对 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ 成立. 事实上 L^p 和 $L^{p'}$ 在某种意义上构成对偶空间, 在对偶空间上的二元运算 $(f, g) \mapsto \int fg$ 具有好的性质, 特别地, L^2 空间和自身对偶. 从而如果 $f, g \in L^2$ 则 $fg \in L^1$. L^2 空间上带有完备的内积

$$\langle f, g \rangle = \int fg dx.$$

它构成所谓的 Hilbert 空间. 这个空间把分析性质和线性代数的性质结合在一起.

Definition 1.4.1 (Hilbert 空间). Hilbert 空间是**可分的完备内积空间**. (可分就是为了让空间有可数的“基”.)

Example 1.4.2. 除了上面的 L^2 空间之外, 在序列空间上也能定义内积. 定义 ℓ^2 空间是

$$\ell^2 = \left\{ \{a_k\}_{k=1}^\infty \mid \sum_{k=1}^\infty |a_k|^2 < +\infty \right\}.$$

那么 $\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^\infty a_k b_k$ 就是一个良好定义的内积.

其实 ℓ^2 也是某种意义下的 L^2 空间, 这是在测度空间 $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \#)$ 上考虑 L^2 性所得结果. 其中 $\#$ 是计数测度, 就满足 $\#S = |S|$.

Hilbert 空间上的运算和线性空间上的运算的最大区别是, 线性空间中只能做有限线性组合, 但是 Hilbert 空间中

$$\sum_{k=1}^\infty a_k \mathbf{e}_k$$

是有定义的, 即可作无穷求和. 我们关心的基也不是选择公理求出的基, 而是在无穷求和的意义下的一组基. 虽然这么说, 但反而在允许无穷求和后事情变得更加直观, 而且我们所想象中基的性质都是满足的.

Definition 1.4.3 (标准正交基). 给定 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$, 如果 $f, g \in \mathcal{H}$ 满足 $\langle f, g \rangle = 0$ 则称它们**正交**. 如果有一个至多可数集 $\{e_k\}$ 其中元素两两正交, 则称其为一个**正交系**. 如果 $\|e_k\| = 1$ 对任意 k 成立则称其为**标准正交系**. 如果标准正交系 $\{e_k\}$ 的有限维线性组合在 $\mathcal{H}$ 中稠密, 那么称其为一组**标准正交基**.

Theorem 1.4.4. 给定 $\{e_k\}$ 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的标准正交系. TFAE:

- (1) $\{e_k\}$ 为标准正交基;
- (2) 如果 $f \in \mathcal{H}$, $\langle f, e_k \rangle = 0$ 则 $f = 0$ (无穷和系数的唯一性);
- (3) 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 均有 $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$, 即有限和 $S_N(f) = \sum_{k=1}^N \langle f, e_k \rangle e_k$ 收敛到 f 本身.
- (4) 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 有 Parseval 恒等式 $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2$.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): 只需证明 $\|f\| = 0$. 根据有限维线性组合的稠密性, 对任意 $\varepsilon > 0$ 均存在 N 与 $a_1, \dots, a_N$ 使得

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N a_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

但是根据条件有 $\langle f, \sum_{k=1}^N a_k e_k \rangle = 0$, 所以上式推出 $\|f\| < \varepsilon$, 根据 ε 的任意性可得 $\|f\| = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3): 我们证明 $S_N(f)$ 构成一个 Cauchy 列. 这是因为 $S_N(f)$ 是 f 在某个有限维线性空间中的投影, 因此其范数不超过 f 的范数, 而后者有限.

$$\langle f, S_N(f) \rangle = \sum_{k=1}^N \langle f, \langle f, e_k \rangle e_k \rangle = \sum_{k=1}^N \langle f, e_k \rangle^2 = \langle S_N(f), S_N(f) \rangle.$$

因此 $\langle f - S_N(f), S_N(f) \rangle = 0$, 所以 $\|S_N(f)\| \leq \|f\|$. 很明显 $\{\|S_N(f)\|\}_{N \geq 1}$ 是单调增列, 因此也是 Cauchy 列. 这样根据

$$\|S_N(f) - S_M(f)\|^2 = \|S_N(f)\|^2 - \|S_M(f)\|^2, \quad N > M;$$

所以 $\{S_N(f)\}_{N \geq 1}$ 也是 Cauchy 列, 它收敛到一个函数 g . 最后由于

$$\langle g, e_k \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle g, S_N(f) \rangle = \langle f, e_k \rangle$$

结合上条件 (2) 就证明了 $f = g$.

(3) $\Rightarrow$ (4): 这时因为对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 N 使得 $\|f - S_N(f)\| < \varepsilon$, 这推出 $\sum_{k=1}^N |\langle f, e_k \rangle|^2 > \|f\|^2 - \varepsilon$. 根据 ε 的任意性以及上面过程中已经证明的 $\|f\| \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2$ 恒成立就得到结论.

(4) $\Rightarrow$ (1): 还是因为 $S_N(f)$ 和 $f - S_N(f)$ 正交, 所以对任何 $\varepsilon > 0$ 都可以使 N 使得 $\|f\|$ 和 $\|S_N(f)\|$ 足够接近, 这就使得 $\|f - S_N(f)\| < \varepsilon$, 从而推得稠密性. $\square$

Remark. 根据上述证明, 只要取定一组 Hilbert 基, 那么 L^2 空间内的所有函数 f 和它的系数 $\{\langle f, e_k \rangle\}_{k \geq 1}$ 之间是一一对应的 (当然在有限维时也有类似的事情成立, 但利用到函数空间上是不是就觉得很非平凡了呢) 并且线性结构, 内积结构都被这个对应所保持. 这就意味着, 所有 Hilbert 空间都同构于典范的 ℓ^2 空间. 反过来, 只要系数 $\sum |a_k|^2 < +\infty$, 他就决定了一个 $f \in L^2$.

代回到经典的 Fourier 级数理论, 我们就是讨论 $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是否构成一组 Hilbert 基. 前面的引理 1.3.2 已经说明了在 L^1 空间中如果 $\langle f, e^{ikx} \rangle = 0$ 那么可以推出 $f = 0$, a.e. 由于 $L^2 \subset L^1$, 这就证出了上面定理 1.4.4 中的第二条. 从而, 我们关心的 Fourier 级数收敛问题在 L^2 空间上是恒成立的.

对任意一组标准正交基, 我们都可以构造类似的 Fourier 分解并给出相应的 Parseval 恒等式. 比如把 $\{\cos kx\}$ 和 $\{\sin kx\}$ 拼起来也是一组标准正交基, 比如说对 $\{1, x, x^2, \dots\}$ 利用 Gram-Schmidt 正交化. 对 Hilbert 空间这个正交化仍然可以有效进行, 是基于下面的定理:

Theorem 1.4.5. 任何 Hilbert 空间都有标准正交基. 特别地, 这推出任何无穷维 Hilbert 空间都同构于 ℓ^2 空间.

Proof. 首先我们可以取出可数个线性无关的函数 $f_1, f_2, \dots$ 满足 $\overline{\text{span} f_i} = \mathcal{H}$. 然后把它逐个进行正交化: 如果某个 f_i 包含于其它 f_j 张成的线性空间的闭包的话, 就把它删去; 否则把它标准正交化使得其范数为 1, 并且和它之前的 f_i 均垂直. 可数步操作后得到的 $\tilde{f}_i$ 是正交系并且仍满足 $\overline{\text{span} \tilde{f}_i} = \mathcal{H}$, 所以是标准正交基. $\square$

Example 1.4.6. 在以前的作业中曾出现过 Legendre 多项式和 Hermite 多项式, 其实它们都是正交系.

在 $L^2([-1, 1], dx)$ 中对单项式 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 进行正交化得到 Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n).$$

在 $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$ 上对 $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ 进行正交化得到 Hermite 多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Week 3: 2025/9/22 2025/9/24

我们知道在有限维内积空间中对任何线性函数 f , 均存在它在空间中的一个对偶 x_0 使得 $f = \langle \cdot, x_0 \rangle$. Riesz 表示定理证明了在 Hilbert 空间中有类似的事情成立.

Theorem 1.4.7 (Riesz). T 是 $\mathcal{H}$ 上的有界线性函数, 即

$$|T(x)| \leq C \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

那么存在 $x_0 \in \mathcal{H}$ 使得 $T(x) = \langle x, x_0 \rangle$.

Proof. 首先回忆线性空间情形的证明, 这是因为实内积作为非退化的双线性函数 $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 诱导了线性单射 $V \rightarrow [V \rightarrow \mathbb{R}] = V^*$. 在无穷情形下这未必是同构, 有限维时根据 $\dim V = \dim V^*$ 得到同构关系. 如果要具体写出对应的 x_0 , 注意到 $\text{codim ker } f = 1$, 所以只要取出向量 $x_0 \in (\text{ker } f)^\perp$ 并满足 $T(x_0) = 1$, 那么就有 $T(x) = \langle x, x_0 \rangle$. 在 Hilbert 空间中方法完全类似.

定义线性子空间

$$\mathcal{H}_0 = \ker T.$$

我们想证明正交分解成立, 即对任意 $x \in \mathcal{H}$ 都有分解

$$x = x_0 + x_1, \quad x_0 \in \mathcal{H}_0, x_1 \perp \mathcal{H}_0.$$

有限维时我们可以考虑子空间的一组标准正交基 $\{e_i\}$ 并用 $\sum \langle x, e_i \rangle e_i$ 来表示 x_0 , 在 Hilbert 空间中需要证明它收敛到 $\mathcal{H}_0$ 中.

不过还有一种更自然的方法来看这件事: x 往 $\mathcal{H}_0$ 的投影 x_0 是使得 $\|x - x_0\|$ 最小的一个 $x_0 \in \mathcal{H}$. 而这件事很容易在 Hilbert 空间下考虑: 定义

$$d(x, \mathcal{H}_0) = \inf_{y \in \mathcal{H}_0} \|x - y\|.$$

我们证明下确界一定能被取到. 先取一列 $\{y_n\}_{n \geq 1}$ 使得 $\{\|y_n - x\|\}_{n \geq 1} \rightarrow d(x, \mathcal{H}_0)$, 我们先证明 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列. 注意到直接放三角不等式不等号是反的, 这里我们运用平行四边形法则

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|y_n + y_m - 2x\|^2 \\ &\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d(x, \mathcal{H}_0)^2. \end{aligned}$$

从而 $\|y_n - y_m\|$, $n, m > N$ 在 N 足够大时可以任意小, 所以 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列, 设 $\{y_n\} \rightarrow x_0$. 但 x_0 不一定仍然落在 $\mathcal{H}_0$ 中.

这时我们需要注意到题目中要求 T 是有界线性函数, 有界性给出

$$C\|y_n - x_0\| \geq |T(y_n - x_0)| = |T(x_0)|, \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow T(x_0) = 0.$$

于是 $x_0 \in \mathcal{H}_0$. 令 $x_1 = x - x_0$, 我们证明 $\langle x_1, y \rangle = 0$ 对任意 $y \in \mathcal{H}_0$ 成立. 这和线性空间一样.

$$\begin{aligned} \|x_1\| &\leq \|x_1 + \lambda y\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow 2\lambda \langle x_1, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle &\geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

考虑 Δ 即得 $\langle x_1, y \rangle = 0$.

回到原题, 如果 $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ 则结论已经成立! 否则任取 $u \in \mathcal{H}$, $u \perp \mathcal{H}_0$ 使得 $T(u) = 1$. 那么对任意 $x \in \mathcal{H}$, 均有 $x - T(x)u \in \ker T = \mathcal{H}_0$, 而且 $T(x)u \perp \mathcal{H}_0$. 所以 $T(x)u$ 是 x 在正交分解中的一项, 即 $x_1 = T(x)u$. 所以

$$\langle x, u \rangle = \langle x_1, u \rangle = T(x) \langle u, u \rangle = T(x).$$

证毕.



2 Fourier 级数的应用

2.1 等分布问题

考虑取值在 $[0, 1]$ 上的数列 $\{\xi_k\}$, 我们想研究它是否均匀地分布在 $[0, 1]$ 上. 我们可以给它一个严格的定义:

Definition 2.1.1. 如果数列 $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ 满足对任意 $a < b \in [0, 1]$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n \mid \xi_k \in [a, b]\}|}{n} = b - a.$$

则称 $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ 在 $[0, 1]$ 上是等分布的. 特别地, $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ 在 $[0, 1]$ 上稠密.

有趣的是等分布问题确有一个容易计算的等价形式, 它就是 (在竞赛中也非常著名的) Weyl 判别准则.

Theorem 2.1.2 (Weyl). 设 $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ 是区间 $[0, 1]$ 上的序列. 下面结论等价:

- (1) $\{\xi_k\}$ 等分布.
- (2) 对任意 $[0, 1]$ 上的 Riemann 可积函数 f , 均有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

- (3) 对任意 $\ell \in \mathbb{N}^*$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i \ell \xi_k} \right) = 0.$$

Proof. 注意到 (2) 是显著更强的, 我们先用 (2) 来推出 (1) 和 (3):

- (2) $\Rightarrow$ (1): 对每个区间 $[a, b] \subset [0, 1]$, 取 $f = \chi_{[a, b]}$ 即得到等分布的定义.
- (2) $\Rightarrow$ (3), 对每个 $\ell \in \mathbb{N}^*$ 取 $f = e^{2\pi i \ell x}$, RHS 都是 0, 就得到 (3).

从而反向的 (1) $\Rightarrow$ (2) 和 (3) $\Rightarrow$ (2) 的思路就很明显: 注意到结论 (2) 明显是线性的, 所以前者相当于问如果 (2) 对阶梯函数成立, 那么是否对所有函数成立? 后者相当于问如果 (2) 对三角多项式成立, 那么是否对所有函数成立?

证明是明显的, 根据 Riemann 积分的定义, 我们可以取上下阶梯函数 $f_+(x)$ 和 $f_-(x)$ 使得 $f_+(x) \geq f(x) \geq f_-(x)$ 恒成立, 并且

$$\int_0^1 f_+(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \leq \varepsilon, \quad \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f_-(x) dx \leq \varepsilon.$$

而 $f_+(x)$ 和 $f_-(x)$ 作为阶梯函数已经满足 (2), 所以

$$\left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n f_{\pm}(\xi_k) \right) - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

再根据大小关系,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n f_-(\xi_k) \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n f_+(\xi_k) \right).$$

所以

$$\left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \right) - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

根据 ε 选取的任意性即得结论. 后者更为容易: 因为根据 1.2.9 三角多项式可以一致逼近连续函数, 所以 LHS 估计的误差是一致的, 这立刻得到对连续函数 (2) 都是成立的. 同样地我们可以选取连续函数 $f_{\pm}(x)$ 满足上面两条性质, 所以连续函数可以替代之前阶梯函数的位置, 从而完成证明. $\square$

Remark. Problem From The Book 第 15 章有提到一样的证明, 从现在的角度来看这个命题把分析里的逼近想法体现地非常好.

我们接下来用上面的等价命题 (3) 来考虑几个例子. 这个条件最好用的地方在于自动在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上考虑问题, 从而完美适配那些“看小数部分”的序列.

Example 2.1.3 (Dirichlet 小定理). 给定无理数 σ , 数列 $\xi_k = \{k\sigma\}$ 在 $(0, 1)$ 上等分布.

Proof. 只需要验证 (3), 注意到在指数上“取小数部分”会直接消失.

$$\left| \sum_{k=1}^n e^{2\pi i k \sigma} \right| = \left| \frac{e^{2\pi i \ell \sigma} - e^{2\pi i \ell (n+1) \sigma}}{1 - e^{2\pi i \ell \sigma}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{2\pi i \ell \sigma}|}.$$

它是有界的, 所以当然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i k \sigma} = 0.$$

$\square$

Example 2.1.4. 给定非零实数 a 和 $\sigma \in (0, 1)$, 定义 $\xi_k = \{ak^\sigma\}$. 则 $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ 在 $(0, 1)$ 上等分布.

Proof. 我们要考虑的序列是 $e^{2\pi i \ell (ak^\sigma)}$, 根据 a 的任意性只需对 $b = 2\pi \ell a$ 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{ibk^\sigma} = 0.$$

我们希望证明它和积分 $\int_1^{n+1} e^{ibx^\sigma} dx$ 之间的差不大: 一方面,

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} e^{ibx^\sigma} dx &= \int_1^{n+1} \frac{x^{1-\sigma}}{ib\sigma} (e^{ibx^\sigma})' dx \\ &= \frac{1}{ib\sigma} (x^{1-\sigma} e^{ibx^\sigma}) \Big|_1^{n+1} - \frac{1}{ib\sigma} \int_1^{n+1} (1-\sigma)x^{-\sigma} e^{ibx^\sigma} dx \\ &\leq \left| \frac{(n+1)^{1-\sigma} + 1}{b\sigma} \right| + \left| \frac{1}{b\sigma} \int_1^{n+1} (x^{1-\sigma})' dx \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{(n+1)^{1-\sigma} + 1}{b\sigma} \right|. \end{aligned}$$

(注意这一项不是周期的, 所以需要用分部积分搞出一项 $x^{1-\sigma}$ 后完成放缩) 另一方面,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n e^{ibk^\sigma} - \int_1^{n+1} e^{ibx^\sigma} dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} (e^{ibk^\sigma} - e^{ibx^\sigma}) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} |e^{ibx^\sigma} - e^{ibk^\sigma}| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} |bx^\sigma - bk^\sigma| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n |b|((k+1)^\sigma - k^\sigma) = |b|((n+1)^\sigma - 1). \end{aligned}$$

第一个不等号用到了 $|e^{ia} - e^{ib}| \leq |a - b|$, 这是因为左侧是单位圆上两点之间的弦长, 右边至少是两点之间的弧长. 根据 $\sigma \in (0, 1)$ 可知

$$\sum_{k=1}^n e^{ibk^\sigma} = O(n^{\max\{\sigma, 1-\sigma\}}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i \ell k^\sigma} = 0.$$

所以 $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ 在 $(0, 1)$ 上等分布. $\left\langle \frac{n}{x} \right\rangle$

Example 2.1.5. 任意给定 $a \in \mathbb{R}$, 对 $k \geq 1$ 定义 $\xi_k = \{a \log(k)\}$. 则 $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ 在 $[0, 1]$ 上不是等分布的.

Proof. 还是代入验证: 要考虑序列为 $e^{2\pi i \ell (a \log k)}$, 设 $b = 2\pi \ell a$, 只需看 $e^{ib \log k}$. 我们看积分 $\int_1^{n+1} e^{ib \log x} dx$:

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} e^{ib \log x} dx &= \int_1^{n+1} \frac{x}{ib} (e^{ib \log x})' dx \\ &= \left(\frac{n+1}{ib} e^{ib \log(n+1)} - \frac{1}{ib} \right) - \int_1^{n+1} \frac{1}{ib} e^{ib \log x} dx. \end{aligned}$$

所以

$$\int_1^{n+1} e^{ib \log x} dx = \frac{(n+1)e^{ib \log(n+1)} - 1}{ib + 1}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n e^{ib \log k} - \int_1^{n+1} e^{ib \log x} dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} (e^{ib \log k} - e^{ib \log x}) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} |e^{ib \log x} - e^{ib \log k}| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} |b \log x - b \log k| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n |b|(\log(k+1) - \log(k)) = |b| \log(n+1). \end{aligned}$$

所以 $|\sum_{k=1}^n e^{ib \log k}| = \Theta(n)$, 并且大概有 (注意到 $b \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sum_{k=1}^n e^{ib \log k}|}{n} = \frac{1}{ib + 1}.$$

所以数列在 $[0, 1]$ 上不是等分布的. $\left\langle \frac{n}{x} \right\rangle$

2.2 Roth 三项等差数列定理

我们首先引入有限 Fourier 分析的概念. 本节考虑的对象是 $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 和在 G 上定义的函数. 可以想象 G 类似于之前的 S^1 , 可以实现为一个圈, 也可以实现为 $\mathbb{Z}$ 的商空间. 我们现在考虑 G 上的复值函数所成集合 $\text{Hom}(G, \mathbb{C})$. 有限集上关于连续, 收敛这样的概念都变得平凡了, 函数 $f \in \text{Hom}(G, \mathbb{C})$ 和数组 $(f(g))_{g \in G}$ 之间可以建立显然的同构, 从而 $\text{Hom}(G, \mathbb{C})$ 就是 n 维复线性空间. 换句话说, 所有 $[g \mapsto \mathbf{1}_{g=h}]$ 构成 $\text{Hom}(G, \mathbb{C})$ 的一组基.

G 上可以赋予计数测度, 因此可以谈论积分 (就是有限的求和) 以及各种 L^p 范数. 特别地, 我们可以定义内积:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)}.$$

现在我们可以考虑 $\text{Hom}(G, \mathbb{C})$ 作为内积空间的一组标准正交基. 回忆我们在竞赛中常用的单位根的性质: 记 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, 则对 $x \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{1}{n} \sum_{x=0}^{n-1} \zeta^{kx} = \mathbf{1}_{k \equiv 0 \pmod{n}},$$

我们把它翻译为在 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上 Fourier 分析的语言: 对 $k \in G$ 定义 $\chi_k(x) = \zeta^{kx}$, 则

$$\langle \chi_k, \chi_l \rangle = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{n-1} \zeta^{(k-l)x} = \mathbf{1}_{k=l}.$$

所以 $\{\chi_k\}_{k \in G}$ 构成 $\text{Hom}(\mathbb{C}, G)$ 的一组标准正交基. (既然这里都已经使用特征标的记号了, 这个命题在有限群表示论中对应的就是: 全体特征标是 G 上的 class function 作为内积空间的一组标准正交基, 所谓 class function 就是把一个共轭类打到一个相同的元素. 我之前还真没注意到这会和 Fourier 分析有上关系. 当然对于交换群情形, 所有不可约表示都是一维的, 我们也可以具体写出它的特征标.) 我们立刻可以使用 Fourier 理论 (也可以不使用, 有限维情况下都是线性代数的简单练习) 得到下面的一些命题.

- 定义

$$\widehat{f}(k) = \langle f, \chi_k \rangle = \sum_{x=0}^{n-1} f(x) e^{-\frac{2\pi i k}{n} x}.$$

那么 Fourier 级数收敛到 f , 即正交分解

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, \chi_k \rangle \chi_k \Rightarrow f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) e^{\frac{2\pi i k}{n} x}.$$

在有限维的意义下我们可以直接展开求和来验证其正确性.

- $\text{Hom}(G, \mathbb{C})$ 通过基 $\{\chi_k\}_{k \in G}$ 同构于 $\mathbb{C}^n$, 即 $f \mapsto (\widehat{f}(0), \widehat{f}(1), \dots, \widehat{f}(n-1))$ 是内积空间之间的同构. 我们发现右边还可以作为一个 G 上的复值函数 (这在 $L^2(S^1)$ 上是做不到的), 我们就把它定义为函数 $\widehat{f}$, 称为 f 的 Fourier 变换.

- 内积空间之间的同构说明:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}.$$

特别地,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{f}(k)|^2.$$

即有限维情形的 Parseval 恒等式.

- 我们可以定义卷积其中卷积定义为

$$f * g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(x-k).$$

对一般的群 G 有类似的操作. 那么频率空间上卷积就是正常的乘法:

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

我们还可以定义 $f \in \text{Hom}(G, \mathbb{C})$ 的各种 L^p 范数:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_{L^\infty} = \max_{k \in G} |\widehat{f}(k)|.$$

接下来我们开始 Roth 定理的证明. Roth 定理的叙述是: 如果一数列在自然数中有正密度, 那么其中必然存在三项等差数列.

Theorem 2.2.1 (Roth 三项等差数列定理). 对 $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 定义 A 在自然数中的上密度为

$$\bar{\rho}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{x \in A, x \leq n\}}{n}.$$

如果 $\bar{\rho}(A) > 0$, 那么 A 中一定包含三项等差数列 (公差不为 0). 即是存在两两不等的 $x, y, z \in A$ 使得 $x + z = 2y$.

我们现在圆周 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上看这个问题, 即在 $\text{mod } n$ 意义下三项等差数列个数的估计, 或者说满足同余方程 $x + z \equiv 2y \pmod{n}$ 的解数, 出于技术性原因让 n 是奇数让 $2y$ 取遍完系. 这可以让我们用上 Fourier 分析 (其实也没有那么神秘, titu 上也出现过这样的手法)

$$\begin{aligned} \#\{(x, y, z) : x, y, z \in A, x + z \equiv y \pmod{n}\} &= \sum_{x \in A} \sum_{y \in A} \sum_{z \in A} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i k}{n}(x+z-2y)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{x, y, z \in A} e^{-\frac{2\pi i k}{n}x} e^{-\frac{2\pi i k}{n}(-2y)} e^{-\frac{2\pi i k}{n}z} \mathbf{1}_{x \in A} \mathbf{1}_{y \in A} \mathbf{1}_{z \in A} \\ &= n^2 \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{\mathbf{1}_A}(k) \widehat{\mathbf{1}_A}(-2k) \widehat{\mathbf{1}_A}(k) \\ &= \frac{1}{n} |A|^3 + n^2 \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{\mathbf{1}_A}(k)^2 \widehat{\mathbf{1}_A}(-2k). \end{aligned}$$

自然地, 我们希望 $k = 0$ 这项为主项, $k \neq 0$ 的项都比较少, 这样可以得到等差数列出现次数大于零, 从而得到结论. 用概率的想法可以佐证这一点:

- 设 $|A| = \delta n$, 我们以 δ 的概率均匀随机选取 A 中元素, 那么对任意的 $(x, y) \in A \times A$, 有 δ 的概率存在 A 中元素 z 使得 $n \mid x + z - 2y$, 从而等差数列个数的期望是 $\delta^3 N^2$, 恰好是这里的第一项.

根据恒等式

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \widehat{\mathbf{1}_A}(k) \right|^2 = \|\mathbf{1}_A\|^2 = \frac{|A|}{n} = \delta,$$

如果每个 $\widehat{\mathbf{1}_A}(k), k \neq 0$ 都比较小, 比如说其绝对值有一致上界 ε , 那么等差数列个数至少为

$$\delta^3 n^2 - n^2 \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left| \widehat{\mathbf{1}_A}(k) \right|^2 = (\delta^3 - \delta \varepsilon) n^2.$$

也就是我们希望 ε 比 δ^2 要小即可. 不过对于原题来讲并不是 $\varepsilon < \delta^2$ 就够了, 我们还需要证明有 $\mathbb{N}$ 上的三项等差数列, 这需要我们有很多等差数列才能满足. 我们先来尝试在这样的 ε 足够小时证明 $\text{mod } n$ 意义下存在等差数列能推出一般的等差数列存在, 为此先规范化上面的概念:

Definition 2.2.2. 给定 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的子集 A , 我们称 A 是 ε -等分布的, 如果对任意 $k \neq 0$ 均有

$$\left| \widehat{\mathbf{1}_A}(k) \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{x \in A} e^{-\frac{2\pi i k x}{n}} \right| \leq \varepsilon$$

成立.

事实上, 如果存在一组 $(x, y, z) \in A^3$ 使得 $x, y \in [\frac{1}{3}n, \frac{2}{3}n)$, 那么一定通过同余方程 $x + z \equiv 2y \pmod{n}$ 能推出 $x + z = 2y$ 成立. 我们设

$$A_{\frac{1}{3}} = A \cap [\frac{1}{3}n, \frac{2}{3}n).$$

所以如果 $|A_{\frac{1}{3}}|$ 较大, 就应当存在满足要求的序列. 具体来进行计算: 设 $|A_{\frac{1}{3}}| = cn$, 那么

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in A_{\frac{1}{3}}} \sum_{y \in A_{\frac{1}{3}}} \sum_{z \in A} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{2\pi i k}{n}(x+z-2y)} = n^2 \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{\mathbf{1}_{A_{\frac{1}{3}}}}(k) \widehat{\mathbf{1}_{A_{\frac{1}{3}}}}(-2k) \widehat{\mathbf{1}_A}(k) \\ &= c^2 \delta n^2 + n^2 \sum_{k \neq 0} \widehat{\mathbf{1}_{A_{\frac{1}{3}}}}(k) \widehat{\mathbf{1}_{A_{\frac{1}{3}}}}(-2k) \widehat{\mathbf{1}_A}(k) \\ &\geq c^2 \delta n^2 - n^2 \sum_{k \neq 0} \left| \widehat{\mathbf{1}_{A_{\frac{1}{3}}}}(k) \right| \left| \widehat{\mathbf{1}_{A_{\frac{1}{3}}}}(-2k) \right| \cdot \varepsilon \\ &\geq c^2 \delta n^2 - \varepsilon n^2 \cdot \left(\sum_{k \neq 0} \left| \widehat{\mathbf{1}_{A_{\frac{1}{3}}}}(k) \right|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \neq 0} \left| \widehat{\mathbf{1}_{A_{\frac{1}{3}}}}(-2k) \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\geq c^2 \delta n^2 - \varepsilon n^2 \cdot c = c(c\delta - \varepsilon) n^2. \end{aligned}$$

注意到使得 $x = y = z$ 的数列项数为 $O(n)$, 所以当 c 差不多是 ε/δ 这个量级的时候等差数列项数就够了. 前面说过 ε 差不多是 δ^2 这个量级的, 所以 c 和 δ 是一个量级的, 这使得我们要去精心控制一些常数才能完成证明.

- 我们首先考虑存在 $\varepsilon < \frac{1}{8}\delta^2$ 使得 A 是 ε -等分布的情形. 接下来分为两类:

- 如果 $c > \frac{1}{4}\delta$, 那么 $\{1, \dots, n\}$ 中的等差数列至少有

$$c(c\delta - \varepsilon)n^2 > \frac{1}{32}\delta^3 n^2$$

个, 并且至多有 n 个公差为 0 的等差数列. 当 $n > C \cdot \delta^{-3}$ 时这推出这样的等差数列存在.

- 如果 $c < \frac{1}{4}\delta$, 那么 $A_{\frac{1}{3}}$ 只占到 A 的 $1/4$ 左右, 即不在 $A_{\frac{1}{3}}$ 中的还有 $\frac{3}{4}\delta n$ 个数落在剩下的总长为 $\frac{2}{3}n$ 的两段数中, 密度升高到了 $\frac{9}{8}\delta$. 这提示我们可以无穷地操作下去, 因为存在一个不依赖于 n 和 δ 的常数 $\frac{1}{8}$, 使得每次可以找到一个子数列 S 满足 $S \cap A$ 在 S 中占比为之前的 $\frac{9}{8}$ 倍. 因此存在一个不依赖于 δ, n 的常数 D 使得操作 D 次后密度超过 1, 所以只要 n 充分大使得操作 D 次, 每次缩小长度至 $\frac{1}{3}n$, 最后还剩下数就可推出矛盾. 这里的整个思想也将用来解决 $\varepsilon > \frac{1}{8}\delta^2$ 的情形.

- 再考虑存在某个 k 使得 $|\widehat{\mathbf{1}_A}(k)| \geq \frac{1}{8}\delta^2$ 的情形, 在这种情况下我们会找一个子等差数列 S 使得 $A \cap S$ 在 S 中密度升高正常数倍, 这就完成了证明.

为此我们其实要考虑 $\sum \mathbf{1}_A \mathbf{1}_S$ 这样的量. 我们先来证明一个引理:

Lemma 2.2.3. 对任意 $f, g \in \text{Hom}(G, \mathbb{C})$ 和 $k \in G$, 我们都有

$$n^2 |\widehat{f}(k)| |\widehat{g}(k)| \leq \sum_{x \in G} \left| \sum_{y \in G} f(y) \overline{g(y-x)} \right|.$$

Proof. 令 $F(x) = \sum_{y \in G} f(y) \overline{g(y-x)}$, 则 F 的第 k 个 Fourier 系数为

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{n-1} F(x) e^{-\frac{2\pi i k}{n} x} &= \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-1} f(y) \overline{g(y-x)} e^{-\frac{2\pi i k}{n} x} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{y=0}^{n-1} f(y) e^{-\frac{2\pi i k}{n} y} \sum_{x=0}^{n-1} \overline{g(y-x)} e^{-\frac{2\pi i k}{n} (y-x)} \\ &= n \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}. \end{aligned}$$

因此需证的命题转化为

$$\frac{1}{n} \sum_{x \in G} |F(x)| \geq |\widehat{F}(k)|, \quad \forall k \in G.$$

这是容易的, 只需写出具体表达式

$$|\widehat{F}(k)| = \frac{1}{n} \left| \sum_{x \in G} F(x) e^{-\frac{2\pi i k}{n} x} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{x \in G} |F(x)|.$$

(这等价于 $\|f\|_{L^1} \geq \|\widehat{f}\|_{L^\infty}$, 我们早在定义 1.1.2 中就验证了这在任何测度空间上均成立.)



关键是这个引理说明了什么：我们分别取 $f = \mathbf{1}_A$ 和 $g = \mathbf{1}_B$. 从而如果 f, g 在某个频率上的值都很大，那么存在一个平移量 x ，使得

$$|A \cap (B - x)| \geq n \left| \widehat{f}(k) \widehat{g}(k) \right|.$$

所以我们的目标转变为对每个 k 去选取一个 B ，它在频率 k 上的值都比较大，并且它的结构比较“整齐”：任意平移之后都近似于是等差数列或者可以分拆为一个等差数列.

- 我们想选择的 B 在 $\bmod n$ 的意义下是一个等差数列

$$\{-md, -(m-1)d, \dots, -d, 0, d, \dots, (m'-1)d, m'd\}$$

它的总长度不超过 $\frac{n}{2}$ ，从而任意平移一个 x 它都能被分为两个等差数列的并. 另一方面， $\widehat{\mathbf{1}_B}(k)$ 应当形如

$$\frac{1}{n} \sum_{x \in B} e^{-\frac{2\pi i k}{n} x} = \frac{1}{n} \sum_{j=-m}^{m'} e^{-\frac{2\pi i k d}{n} j}.$$

我们想让它比较大，就需要让所有单位根都尽量接近 1，即让 kd 尽量小.

- 依此我们用下面的数论方法来取出 d 满足 (Thue Lemma)

$$0 < d \leq \sqrt{n}, \quad 0 \leq (kd) \bmod n \leq \sqrt{n}.$$

考虑把 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 分割成 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 个连续段 $A_1, A_2, \dots, A_t$ ，每个连续段有 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 或 $\lceil \sqrt{n} \rceil$ 个数，然后考虑映射

$$\varphi: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow [t] \times [t]: a \mapsto (p, q) \text{ s.t. } a \in A_p, ka \in A_q.$$

那么根据抽屉原理存在两个数的像相同，它们中大数减小数就得到满足这里要求的 d .

- 取 $m = m' = \frac{1}{8} \lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ ，就得到大小约为 $\frac{1}{4} \sqrt{n}$ 的集合 B ，它占到的长度至多为 $\frac{1}{4}n$ ，从而不会造成重叠. 接下来计算 $\widehat{\mathbf{1}_B}(k)$ 和 $\frac{|B|}{n}$ 之间的差距：

$$\begin{aligned} \left| \widehat{\mathbf{1}_B}(k) - \frac{|B|}{n} \right| &= \frac{1}{n} \left| \sum_{j=-m}^{m'} (e^{-\frac{2\pi i k d}{n} j} - 1) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=-m}^{m'} \frac{2\pi(kd)(\bmod n)}{n} |j| \\ &\leq \frac{2\pi}{n\sqrt{n}} \cdot \sum_{|j| \leq \frac{|B|}{2}} |j| \leq \frac{2\pi}{n\sqrt{n}} \left(\frac{|B|}{2} \right)^2 \leq \frac{|B|}{2n}. \end{aligned}$$

所以 $\widehat{\mathbf{1}_B}(k)$ 至少有 $\frac{|B|}{2n}$ 这么大，我们可以配合上之前所假设的存在 k 使得 $|\widehat{\mathbf{1}_A}(k)|$ 较大完成证明.

- 记 $f_A = \mathbf{1}_A - \delta$, 那么 f_A 的零频率为 0 ($\sum_x f_A(x) = |A| - \delta n = 0$), 其余频率和 $\mathbf{1}_A$ 相同. 因此

$$n^2 \widehat{f_A}(k) \widehat{\mathbf{1}_B}(k) \geq n^2 \cdot \frac{1}{8} \delta^2 \cdot \frac{|B|}{2n} = \frac{\delta^2 |B|}{16} n.$$

所以根据引理 2.2.3,

$$\sum_{x \in G} ||A \cap (B - x)| - \delta |B|| = \sum_{x \in G} \left| \sum_{y \in G} (\mathbf{1}_A(y) - \delta) \overline{\mathbf{1}_B(y - x)} \right| \geq \frac{\delta^2 |B|}{16} n.$$

又因为

$$\sum_{x \in G} \left(\sum_{y \in G} (\mathbf{1}_A(y) - \delta) \overline{\mathbf{1}_B(y - x)} \right) = \sum_{y \in G} (\mathbf{1}_A(y) - \delta) \sum_{x \in G} \overline{\mathbf{1}_B(x)} = 0,$$

所以存在 $x \in G$ 使得

$$\sum_{x \in G} (|A \cap (B - x)| - \delta |B|) \geq \frac{\delta^2 |B|}{32}.$$

这时 $A \cap (B - x)$ 在 $B - x$ 中所占总密度为 $\delta + \frac{\delta^2}{32}$, 大于 A 在 G 中所占的密度. 此时 $B - x$ 被分为两个等差数列, 只需考虑 A 和两边的交. 如果有一个等差数列里元素个数实在太少 (比如少于 $\delta + \frac{\delta^2}{64}$), 那么就选择另一个, 就算它占满里面元素也不会太多, 反之就直接考虑所占密度更大的一个即可.

总结: 我们证明了

Proposition 2.2.4. 假设 $A \subset \{0, 1, \dots, n\}$, $|A| = \delta n$ 并且 $n > 33\delta^{-2}$. 那么, 要么 A 中含三项等差数列, 要么存在一个长度至少为 $\frac{\delta^2}{256} \sqrt{N}$ 的等差数列 P , 使得 $|A \cap P| \geq (\delta + \frac{\delta^2}{64}) |P|$.

我们只需考虑后者一直成立的情形, 经过 $\lfloor \frac{65}{\delta} \rfloor$ 次缩减我们可以让密度从 δ 升高到 2δ , 从而经过

$$\frac{65}{\delta} + \frac{65}{2\delta} + \frac{65}{4\delta} + \dots \leq \frac{130}{\delta}$$

次缩减密度为超过 1, 这时导致矛盾. 因此我们只需要最初的 n 满足 $\frac{130}{\delta}$ 次缩减后长度不低于 $33\delta^{-2}$ 即可. k 次缩减后长度至少为

$$\frac{\delta^4}{256^2} N^{\frac{1}{2^k}} \geq 33\delta^{-2} \Rightarrow \log n \geq C \cdot 2^{130\delta^{-1}} \Rightarrow \log \log n \geq C \cdot \delta^{-1}.$$

至此完成了定理证明.

Remark. Szemerédi's Theorem 声称: 如果 A 在 $\mathbb{N}$ 上具有正密度, 那么 A 中存在任意长度的等差数列. 这已经成为加性组合中的一个经典命题, 并且可以完全使用组合的知识用 Counting Lemma 解决, 其证明是另一个话题了.

Week 4: 2025/9/29**2.3 Dirichlet 大定理**

为了使用 Fourier 分析, 我们需要先引入任意有限交换群 G 上的 Fourier 分析. 注意, 我们这里对交换群 G 使用乘法记号. 定义

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} f(a) \overline{g(a)}.$$

我们还是想要寻找 $\text{Hom}(G, \mathbb{C})$ 在这组内积下的一组标准正交基. 下面的定义看上去有些奇怪, 但我们会立即发现它很巧妙地利用了群结构给出一组正交基.

Definition 2.3.1 (群的特征标). 对交换群 G , 如果 $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{C})$ 满足

$$\chi(ab) = \chi(a) \cdot \chi(b), \quad \forall a, b \in G,$$

则称 χ 为 G 上的**特征**, 常值函数 $\mathbf{1}$ 称为 G 的**平凡特征**, 记为 χ_0 . 全体特征构成一个交换群 (根据显然定义的乘法 $(\chi\phi)(a) := \chi(a)\phi(a)$), 称为 G 的**对偶群** $\widehat{G}$.

如果 G 是有限群, 那么根据群的性质有 $a^{|G|} = 1$ 恒成立, 所以 $\chi(a)^{|G|} = 1$, 所以每个 $\chi(a)$ 都是 $|G|$ 次单位根, 特别地模长均为 1.

Proposition 2.3.2. 对有限交换群 G , $\widehat{G}$ 中所有元素恰好构成 $\text{Hom}(G, \mathbb{C})$ 的一组标准正交基.

Proof. 我们先证明 $\{\chi_k\}$ 是一组标准正交系. 首先对 $\chi \neq \chi_0$, 存在 $a \in G$ 使得 $\chi(a) \neq 1$. 从而

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(ag) = \chi(a) \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g).$$

所以 $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = 0$. 于是

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi'(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\chi\chi'^{-1})(g) = \begin{cases} 0, & \chi \neq \chi'; \\ 1, & \chi = \chi' \end{cases}.$$

还需证明它张成全空间. 由于现在是有限维的, 我们可以比较维数, 即证明 $|\widehat{G}| = |G|$. 使用有限生成群结构定理, 把群 G 写成一些循环群的直积. 我们在上一节已经证明循环群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的对偶群就是 $\{\zeta_n^k\}_{0 \leq k < n}$, 恰有 n 个元素; 于是只需证明如果有 $|\widehat{G}| = |G|$ 以及 $|\widehat{H}| = |H|$, 那么 $|\widehat{G \times H}| = |G \times H|$ 即可. 实际上如果有 G 的特征标 χ_G 和 H 的特征标 χ_H 就能唯一构造出 $\chi_G \cdot \chi_H : (g, h) \mapsto \chi_G(g)\chi_H(h)$ 是一个特征标, 故这是显然成立的. 

Remark. 1. 我们在数论里很关心的一个对象是 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, 根据原根的存在性, 它是 $p-1$ 阶循环群, 于是它的特征标可以具体使用原根的幂来表示. 不过我们

会发现, 在有限 Fourier 分析的讨论中, 特征标到底是什么没有很重要 (接下来的证明中会体现这一点), 而是它所具有的理论价值 (可作 Fourier 分解, 具有调和性质等) 会更有用.

2. 我们可以不使用有限 Abel 群结构定理完成证明. 其实只需要对上面的证明做很小的改动: 只需对 $|G|$ 归纳, 然后选取 G 的一个循环子群 H , 对 H 和 G/H 使用归纳假设再把它拼起来即可. 当然使用结构定理可以得到更强的结论: 我们注意到 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 的对偶群也是 n 阶循环群, 所以一般的 G 的对偶群和它本身同构.
3. 有限群表示论研究 $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, 并定义 $\chi_\rho(g) = \mathrm{trace} \, g$. 可以证明这样定义出的 $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C})$ 在每个共轭类上的取值都相同. 我们称这种在每个共轭类上取值相同的函数为 class function. 那么可以证明全体特征标 $\{\chi_k\}$ 是全体 class function 的一组标准正交基. 特别地, 恰好有 $|C(G)|$ 个特征标. (注意在群表中这是构成标准正交基的一个推论) 即我们证明如果存在 class function α 和所有 χ_k 均正交那么它必须是零. 这是因为条件结合上 Schur Lemma 可推出在任何不可约表示中 $\sum_g \alpha(g) \cdot \rho(g)$ 都是 0, 于是根据有限群表示均半单可知在所有表示下 $\sum \alpha(g) \cdot \rho(g)$ 都是 0, 代入 $\rho = \rho_{\mathrm{Reg}}$ 即得 $\alpha = 0$.

现在我们可以对任意 $f \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C})$ 考虑 f 的 Fourier 系数

$$\widehat{f}(\chi) = \langle f, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \chi^{-1}(g).$$

那么根据 $\widehat{G}$ 是一组标准正交基,

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \cdot \chi,$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \left\langle \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}_1(\chi) \cdot \chi, \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}_2(\chi) \cdot \chi \right\rangle = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}_1(\chi) \overline{\widehat{f}_2(\chi)}.$$

同样地可以定义卷积:

$$(f * g)(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{b \in G} f(b) g(ab^{-1}).$$

接下来我们的讨论完全在 $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ 上进行, 此时 G 上的特征被称为 Dirichlet 特征, 则 $|G| = |\widehat{G}| = \varphi(n)$.

Theorem 2.3.3 (Dirichlet). 给定正整数 a, d 满足 $\gcd(a, d) = 1$, 则 $\{a + nd : n \in \mathbb{Z}\}$ 中存在无穷多个素数.

接下来的证明将会计算级数 $\sum_{p \equiv a \pmod{n}} p^{-s}$. (熟知 $s = 1$ 时素数倒数和发散而 $s > 1$ 时倒数和收敛, 所以我们将研究 $s \rightarrow 1^+$ 时的形态, 把 s 纳入讨论是为了应用分析方法) 如果级

数发散, 就证明了这样的素数有无穷多个. 我们定义的 Dirichlet 特征标就可以用来至少把上述求和化作一个可操作的对象: 考虑 G 上的示性函数 $\mathbf{1}_\ell$ 的 Fourier 分解:

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_\ell(n) &= \sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle \mathbf{1}_\ell, \chi \rangle \chi(n) \\ &= \sum_{\chi \in \widehat{G}} \cdot \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathbf{1}_\ell(g) \overline{\chi(g)} \right) \chi(n) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{\chi(\ell)} \chi(n).\end{aligned}$$

这样我们就可以表示满足 $p \equiv s \pmod{n}$ 的那些数, 并且按特征标分离:

$$\begin{aligned}\sum_{p \equiv \ell \pmod{n}} \frac{1}{p^s} &= \sum_p p^{-s} \mathbf{1}_\ell(p) = \sum_p p^{-s} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{\chi(\ell)} \chi(p) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{\chi(\ell)} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}.\end{aligned}$$

(注意这里可能有些小技术细节: 我们把特征标 χ 和示性函数 $\mathbf{1}_\ell$ 的定义域都拓展到了 $\mathbb{N}^*$ 上, 如果 $\gcd(a, n) \neq 1$, 自动定义 $\chi(a) = \mathbf{1}_\ell(a) = 0$, 但是很明显在上面的求和式中满足 $\gcd(p, n) = 1$ 的素数只有有限个不影响收敛性) 于是我们可以对 χ 分块来讨论级数 $\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$. 一方面, 当 $\chi = \chi_0$ 时,

$$\overline{\chi_0(\ell)} \sum_p \frac{\chi_0(p)}{p^s} = \sum_{\gcd(p, n)=1} \frac{1}{p^s}.$$

可以忽略那些和 n 不互素的素数, 这样求和就对全体素数进行. 我们将证明在 $s \rightarrow 1$ 时这是发散的 (这就是素数无穷多的一种证明), 而对非平凡特征标 χ 来说, 由于震荡的存在, 我们想要证明 $\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$ 在 $s \rightarrow 1$ 时是有界的, 从而整个级数只有 χ_0 处是主贡献, 因此级数发散.

Step 1. 我们将素数倒数和与正整数倒数和作对比: 利用 Euler 公式,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

从而 $\sum_p p^{-s}$ 会和 $\log \zeta(s)$ 接近, 因为

$$\log \zeta(s) = - \sum_p (\log(1 - p^{-s}) + p^{-s}) + \sum_p p^{-s},$$

而

$$|\log(1 - p^{-s}) + p^{-s}| \leq p^{-2s},$$

所以第一项级数收敛, $\log \zeta(s) \sim \sum_p p^{-s}$. 特别地 $s \rightarrow 1$ 时 $\zeta(s)$ 为调和级数, $\sum_p p^{-1}$ 发散.

Step 2. 类似地, 考虑 $\sum_p \chi(p)p^{-s}$ 可以化归为考虑一般的 $\sum_n \chi(n)n^{-s}$. 这便是 L 函数:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

于是有一般的 Euler 公式:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\chi(p)p^{-s})^k \right) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}.$$

我们还是想说明 $\sum_p \chi(p) \cdot p^{-s}$ 和 $\log L(s, \chi)$ 比较接近. 一方面, 由于 χ 存在震荡性 (这只有在 χ 是非平凡特征时才成立)

$$\sum_{k=1}^n \chi(k) = 0,$$

所以所有部分和 $\sum_{k=1}^m \chi(k)$ 均有界, 这导致我们根据 Abel 判别准则, 容易证明 $L(s, \chi)$ 对 $s > 0$ 都是收敛的. 但问题在于:

$$\log L(s, \chi) = - \sum_p \log(1 - \chi(p)p^{-s}) \stackrel{!}{=} \sum_p \chi(p)p^{-s} + O(1).$$

首先 $1 - \chi(p)p^{-s}$ 是复值, 我们不知道如何对其定义! (会有多值函数之类的问题产生) 其次 $L(s, \chi)$ 的有界性不足以推出 $\log L(s, \chi)$ 有界, 因为没有保证 $L(s, \chi) = 0$.

接下来将解决这些问题.¹我们将证明 $L(s, \chi)$ 对 $s > 0$ 均可定义, 且对 s 连续.

Step 3. 我们先证明有广义的 Euler 公式成立:

$$L(s, \chi) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}.$$

为此需要证明 RHS 是收敛的, 但是在实情形下, 证明它收敛的标准做法就是取对数, 所以我们在这里就已经遇上了麻烦. 我们不去考虑复变上的困难, 在形式上定义一个具有 $\log$ 功能的函数. 对 $|z| < 1$, 可定义

$$\log_1\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

从而可定义

$$\log_1\left(\frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(p^k)p^{-sk}}{k}.$$

容易看出根据展开式 $\sum_p \log_1\left(\frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}\right)$ 对 $s > 1$ 是收敛的, 因此只需证明 $\log_1$ 是通常意义下的对数, 即

$$\exp\left(\log_1\left(\frac{1}{1-z}\right)\right) = \frac{1}{1-z}.$$

¹根据辜开源的讲义, 接下来的处理手段来自 Stein Fourier Theory, Cpt 8.

证明方法是对函数

$$f(z) = (1-z) \exp \left(\log_1 \left(\frac{1}{1-z} \right) \right)$$

求导:

$$f'(z) = ((1-z) \left(\sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} \right) - 1) \exp \left(\log_1 \left(\frac{1}{1-z} \right) \right) = 0.$$

因此取 $z = 0$ 就知道上述函数 f 在任意 z 处都取 1, 这就证明了右边的无穷乘积的确是收敛的. 结合 χ 满足乘性就可用和一般情形相同的方法推出 Euler 公式成立.

Step 4. 现在我们可以对 Euler 公式两边求导了, 并且根据 $\log_1$ 的性质有

$$\log_1 \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}} = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1).$$

并且这个常数 $O(1)$ 对 $s \in [1, +\infty)$ 是一致的. 所以只需要看 L 函数的对数. 对 L 函数来说, 幂级数展开式不是最好的研究形式, 注意到它可以看作关于 s 的函数, 因此我们可以从函数的角度考虑另一种定义对数的方式: (看成函数也是必须的, 别忘了我们最后目标会令 $s \rightarrow 1^+$, 但是 Euler 公式只对 $s > 1$ 成立; 所以我们需要特别对 L 函数研究连续性等结论来把最终的极限化归为讨论点 $L(1, \chi)$ 处的取值.)

$$\log_2 f(s) = - \int_s^{\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} dt.$$

注意在实情形下, 这就相当于考虑 $\log f$ 的导数的积分, 根据 Newton-Leibniz 公式就得到上式结果是 $\log_2 f(s)$. 特别地,

$$\log_2 L(s, \chi) = - \int_s^{\infty} \frac{L'(t, \chi)}{L(t, \chi)} dt.$$

我们想证明这样的定义对整个 $s \in (0, \infty)$ 均是合理的. 首先我们之前说过根据 Abel 判别准则, 对非平凡特征标 χ , $L(s, \chi)$ 对 $s > 0$ 均收敛. 对 s 求导得到

$$L'(s, \chi) = - \log n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

于是同样对 $s > 0$ 可证明 $L'(s, \chi)$ 收敛, 并且是内闭一致收敛, 这导致 $L'(s, \chi)$ 是关于 s 的连续函数, 从而 L 连续可微. 另一方面,

$$L(s, \chi) = 1 + O(e^{-cs}), \quad L'(s, \chi) = O(e^{-c's}), \quad s \rightarrow \infty.$$

所以从 s 到 ∞ 的积分是良定的. 最后, 可以证明 $\log_2$ 也满足对数性质

$$\exp(\log_2 L(s, \chi)) = L(s, \chi).$$

这次我们对 s 求导: 记

$$g(s) := \exp(-\log_2 L(s, \chi)) L(s, \chi).$$

则

$$g'(s) = -\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \exp(-\log_2 L(s, \chi)) L(s, \chi) + \exp(-\log_2 L(s, \chi)) L'(s, \chi) = 0.$$

然后令 $s \rightarrow \infty$ 就可知 $g(s) \rightarrow 1$. (因为 L 的极限为 1, $\log_2 L$ 的极限为 0, 所以 g 的极限为 1), 这就给出了对数性质的证明. 但这还不足以推出两种对数等同, 只能有

$$\log_2 L(s, \chi) = \log_1 L(s, \chi) + 2\pi i k(s).$$

(用复变的话来说, 它们可能落在不同的单值分支中.) 根据 L 函数的连续性, k 应为常值函数. 然后令 $s \rightarrow \infty$ 可知两种 $\log$ 都趋于 0, 从而 $k(s)$ 恒为零. 至此, 我们可以列出:

$$\log_2 L(s, \chi) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1), \quad s \in (1, \infty).$$

这是因为当 $s > 1$ 时根据无穷乘积的形式我们可以保证 L 函数不为零. 现在如果 $L(1, \chi) \neq 0$, 我们就可以两边取极限 $s \rightarrow 1^+$, 根据连续可微性可知

$$\log_2 L(1, \chi) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p} + O(1).$$

因此 $\sum_p \frac{\chi(p)}{p}$ 对所有非平凡特征标是有界的, 就完成了证明. 至此我们只差最后一步.

Step 5. 我们证明如果 χ 是非平凡特征, 则 $L(1, \chi) \neq 0$. 注意到当 $s > 1$ 时,

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\prod_{\chi \in \widehat{G}} L(s, \chi) \right) &= \sum_{\chi \in \widehat{G}} \sum_p \log \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}} \\ &= \sum_{\chi \in \widehat{G}} \sum_p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi(p)^k}{k p^{ks}} \geq 0. \end{aligned}$$

这是因为我可以固定 p, k 对特征标 χ 求和, 即考虑 $\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(p^k)$. 如果 $p^k \equiv 1 \pmod{n}$ 上式结果为 $|G|$, 否则结果都为 0. (这是因为除了 1 外, 其它数都满足存在 $\chi \in \widehat{G}$ 使得 $\chi(a) \neq 1$, 然后轮换求和即可) 无论怎样总有 $\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(p^k) \geq 0$, 从而

$$\prod_{\chi \in \widehat{G}} L(s, \chi) \geq 1, \quad \forall s > 1.$$

当 $\chi = \chi_0$ 时, $L(s, \chi_0)$ 是不收敛的.

$$L(s, \chi_0) = \prod_{p \nmid n} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p|n} (1 - p^{-s}) \zeta(s).$$

根据积分可得对 $s > 1$ 有 $\zeta(s) \leq 1 + (s-1)^{-1}$, 因此存在一致常数 C 使得对 $s \rightarrow 1^+$ 恒有

$$L(s, \chi_0) \leq \frac{C}{s-1}.$$

另一方面, 之前已经说明对任意非平凡特征标 χ , $L(s, \chi)$ 对 $s \in (0, +\infty)$ 均收敛. 所以如果 $L(1, \chi) \neq 0$, 那么 $L(s, \chi)$ 相当于没有影响的常数. 但如果 $L(1, \chi) = 0$, 那么 $L(s, \chi)$ 在上述乘积中就会产生贡献, 根据 L 函数的连续可微性可知这时存在常数 C 使得 $s \rightarrow 1^+$ 时有

$$|L(s, \chi)| \leq C(s-1).$$

这样如果有至少两个 $L(1, \chi) = 0$, 那么所有 $L(1, \chi)$ 的积就会有一项 $(s-1)^{-1}$ 和至少两项 $(s-1)$, 导致在 $s \rightarrow 1$ 时乘积趋于 0, 矛盾! 特别地, 如果 χ 是复特征标 ($\chi \neq \bar{\chi}$), 那么 $L(1, \chi) = 0$ 自动推出 $L(1, \bar{\chi}) = 0$, 这就导致有两个特征标满足 $L(1, \chi) = 0$, 矛盾. 所以对复特征标均有 $L(1, \chi) \neq 0$.

Step 6. 最后来证明对实特征标 χ 也有 $L(1, \chi) \neq 0$, 它的证明很技术化.¹ 考虑函数

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) \frac{x^n}{1-x^n}.$$

根据 $\frac{x^n}{1-x^n}$ 关于 n 的递减性可知上述级数对 $x \in [0, 1)$ 均收敛. 一方面,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq 1} \chi(n) \sum_{k \geq 0} x^{(k+1)n} \\ &= \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{d|m} \chi(d) \right) x^m. \end{aligned}$$

由于 χ 为完全积性函数, 所以设 $m = \prod_i p_i^{\alpha_i}$,

$$\sum_{d|m} \chi(d) = \prod_i (1 + \chi(p_i) + \chi(p_i)^2 + \cdots + \chi(p_i)^{\alpha_i}).$$

因为 $\chi(p_i) \in \{\pm 1\}$, 所以上述求积中每个括号内求和结果都至少为 $1 + (-1) + 1 + \cdots \geq 0$, 因此每项系数均非负. 特别地当 m 是完全平方数时求和总以 1 结束, 因此有无穷多项系数至少为 1. 由此得到:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

假设 $L(1, \chi) = 0$, 考虑函数

$$b_n(x) = \frac{1}{n(1-x)} - \frac{x^n}{1-x^n}.$$

则

$$\sum_{n \geq 1} \chi(n) b_n(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n} - f(x) = -f(x).$$

¹这里采用了 Staignt From The Book (英文版 P330) 上的初等证明, 技巧性很强但比起课上讲的还是容易理解不少, 不想再整理那个了.

因此 $x \rightarrow 1^-$ 时上式趋于 $+\infty$. 但是

$$\begin{aligned} b_n(x) - b_{n+1}(x) &= \frac{1}{n(n+1)(1-x)} + \frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} - \frac{x^n}{1-x^n} \\ &= \frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{x^n}{(1+x+\cdots+x^n)(1+x+\cdots+x^{n-1})} \right) \\ &\geq \frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{x^n}{(n+1)nx^{n/2}x^{(n-1)/2}} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

所以根据 Abel 判别准则, $\sum_{n \geq 1} \chi(n)b_n(x)$ 有一致上界 $M \cdot b_1(x) = M$. 矛盾!

至此完成了 Dirichlet 定理的证明.

2.4 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 变换

$\mathbb{R}$ 上的 Fourier 变换可以看作是 $\mathbb{R}$ 上考虑 Fourier 系数的连续化, 不过也有很多不同之处: 最明显地, Fourier 级数理论一般在 S^1 或者 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上进行, Fourier 变换则是对定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数考虑. 一方面, 我们能对 $\mathbb{R}$ 上以 L 为周期的函数考虑其 Fourier 系数, 它在每个 $\{2\pi n/L\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 处截取系数. 当 L 越大时, 系数截取越细, 直到 $L \rightarrow \infty$ 时, 我们对任意 $\mathbb{R}$ 上的函数考虑它在每个频率处的 Fourier 系数. 从而, 求和也被替换为积分. 这样的想法还能推广到高维上, 给出 $\mathbb{R}^n$ 中 Fourier 变换的定义.

Definition 2.4.1. 对 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数 f , 定义 f 的 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx.$$

定义其 Fourier 逆变换 (读作 f check) :

$$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi.$$

Remark. 严格来说, 我们还没有证明 $\check{f}$ 是 Fourier 逆变换, 现在它只是一个定义. 而且这件事是比较奇怪的, 因为它并不在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上给出逆. “Fourier 逆变换是否回到 f ” 就对应着 “Fourier 级数是否收敛到 f ” (可以对比表达式得到).

Fourier 变换的具体表达式在不同教材里可能不同, 从而会导致系数上出现差异, 看书时应注意.

Example 2.4.2. 考虑函数 $f(x) = \mathbf{1}_{[a,b]}$. 则

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_a^b e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \frac{e^{-2\pi i b \xi} - e^{-2\pi i a \xi}}{-2\pi i \xi}. \end{aligned}$$

如果令 $[a, b] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 那么

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin \pi \xi}{-i \pi \xi}.$$

我们知道 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是绝对可积的, 因而 $\hat{f}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是 L^1 的.

Example 2.4.3 (Gauss 函数的 Fourier 变换). 考虑函数 $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$. (注意这里 $x \in \mathbb{R}^n$.) 先考虑一维情形, 计算其 Fourier 变换:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi((x+i\xi)^2 + \xi^2)} dx \\ &= e^{-\pi|\xi|^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = e^{-\pi|\xi|^2} \int_{\text{Im } z = \xi} e^{-\pi z^2} dz.\end{aligned}$$

由于函数 e^{-z^2} 在复平面上解析 (但不能延拓到 ∞ 上), 并且在 $z \rightarrow \infty$ 时 $e^{-z^2} \rightarrow 0$, 因此根据同伦不变性, 沿实轴积分和沿 $\text{Im } z = \xi$ 积分所得结果相同. (这段证明需要逼近操作, 大概来说就是先考虑将 $[-N, N]$ 上的积分变为先在虚轴方向上上升到 ξ , 再实方向从 $-N$ 移动到 N , 然后再下降到 0, 然后证明两段竖的在 $N \rightarrow \infty$ 时积分会 $\rightarrow 0$) 所以根据 $\mathbb{R}$ 上积分的结论可知

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1 \Rightarrow \hat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}.$$

即这个函数在物理空间和频率空间上的表达式相同, 或者可以直接说 $\hat{f} = f$.

另一种不用到复分析的方法如下: 我们把它看成 $\mathbb{R}$ 上取复数值的含参积分.

$$\begin{aligned}G(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx. \\ G'(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} -2\pi i(x+i\xi) e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx.\end{aligned}$$

注意到

$$\partial_x(e^{-\pi(x+i\xi)^2}) = -2\pi i(x+i\xi) e^{-\pi(x+i\xi)^2},$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}} -2\pi i(x+i\xi) e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} i \partial_x(e^{-\pi(x+i\xi)^2}) dx = 0.$$

这是因为当 $x \rightarrow \infty$ 时 $|e^{-\pi(x+i\xi)^2}| \rightarrow 0$ (即使其辐角不断在变化). 从而 $G'(\xi) = 0$, 代入 $\xi = 0$ 即可解得 $G(\xi)$ 恒为 1.

最后推广到高维情形, 我们先在 ξ 方向上积分, 再在垂直于 ξ 的方向上其积分. 设 $x = x_0 + x_1$, 其中 x_1 在 ξ 方向上, x_0 在垂直于 ξ 方向的平面内. 则

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\pi|x_0|^2} \int_{\mathbb{R} e^{-\pi|x_1|^2}} e^{-2\pi i x_1 \xi} dx_1 dx_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\pi|x_0|^2} \cdot e^{-\pi|\xi|^2} dx_0 = e^{-\pi|\xi|^2}.\end{aligned}$$

最后一步是因为 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上考虑 $e^{-\pi|x_0|^2}$ 的积分可以化为在每个分量上考虑 Gauss 积分然后相乘.

当我们将 f 进行一些基本操作时, 它可以被反映在频率空间上.

Proposition 2.4.4 (Fourier 变换基本性质). 物理空间和频率空间有如下对应关系:

(i) 平移: $\widehat{\tau_{x_0} f}(\xi) = e^{2\pi i \langle x_0, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi)$, 或者说 $\mathcal{F}(\tau_{x_0} f)(\xi) = e^{2\pi i \langle x_0, \xi \rangle} (\mathcal{F} f)(\xi)$.

(ii) 伸缩: $\widehat{D_\lambda f}(\xi) = |\lambda|^{-n} \widehat{f}(\lambda^{-1} \xi)$, 或者说 $\mathcal{F}(D_\lambda f) = |\lambda|^{-n} D_{\lambda^{-1}} \mathcal{F}(f)$.

(iii) 线性变换: $\widehat{f \circ T}(\xi) = |\det T|^{-1} \widehat{f}((T^{-1})^* \xi)$. 特别地, 当 T 是正交变换 (旋转) 时, $\widehat{f \circ T}(\xi) = \widehat{f}(T\xi)$.

(iv) 求导: $\widehat{\partial_k f}(\xi) = 2\pi i \xi_k \widehat{f}(\xi)$, 其中 ξ_k 意谓 ξ 的第 k 个分量. 此时 f 要求有紧支集.

(v) 乘法: $\widehat{(-2\pi i x_k f)}(\xi) = (\partial_k \widehat{f})(\xi)$. 这同样要求 f 有紧支集.

Proof. (1)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau_{x_0} f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{x_0} f)(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x + x_0) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle y - x_0, \xi \rangle} d(y - x_0) \\ &= e^{2\pi i \langle x_0, \xi \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle y, \xi \rangle} dy = e^{2\pi i \langle x_0, \xi \rangle} (\mathcal{F} f)(\xi). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(D_\lambda f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (D_\lambda f)(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle y/\lambda, \xi \rangle} d\frac{y}{\lambda} \\ &= \frac{1}{|\lambda|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle y, \xi/\lambda \rangle} dy = |\lambda|^{-n} (\mathcal{F} f)(\xi/\lambda). \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \circ T)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(T(x)) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle T^{-1}(y), \xi \rangle} dT^{-1}(y) \\ &= |\det T|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle y, (T^{-1})^* \xi \rangle} dy \\ &= |\det T|^{-1} (\mathcal{F} f)((T^{-1})^* \xi). \end{aligned}$$

当 T 是正交变换时, $|\det T| = 1$ 并且 $(T^{-1})^* = T$.

(4)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\partial_k f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_k f)(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} (\partial_k f)(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx_k \right) dx_1 \dots \widehat{dx_k} \dots dx_n. \end{aligned}$$

固定其它 $n-1$ 个分量, 考虑 $x = \mathbf{x}_0 + x_k \mathbf{e}_k$. 由于 f 有紧支集, 故

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\partial_k f)(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx_k &= \int_{\mathbb{R}} \partial_k (f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}) dx_k \\ &+ \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot 2\pi i \langle \mathbf{e}_k, \xi \rangle e^{-2\pi i (\langle \mathbf{x}_0, \xi \rangle + x_k \langle \mathbf{e}_k, \xi \rangle)} dx_k \\ &= 2\pi i \langle \mathbf{e}_k, \xi \rangle \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx_k. \end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{F}(\partial_k f)(\xi) = 2\pi i \langle \mathbf{e}_k, \xi \rangle \mathcal{F}f(\xi) = 2\pi i \xi_k \mathcal{F}f(\xi).$$

(5)

$$\begin{aligned} (-\widehat{2\pi i x_k f})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} -2\pi i x_k f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\partial_{\xi_k} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{\xi_k} (f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle}) dx = \partial_{\xi_k} \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$



Proposition 2.4.5. 对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}$ 满足下述性质:

- (L^∞ 性) $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$, 因此 $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- (一致连续性) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 h 使得对任意 $|\xi - \zeta| < h$ 有 $|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\zeta)| < \varepsilon$. 因此 $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$.
- (Riemann-Lebesgue) 如果 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$. 该性质被叫做 $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Proof. (1) 这是因为对任意 ξ 均有

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1}.$$

(这一点其实可以说是保证了我们可以定义 Fourier 变换.)

(2) 设 $\zeta = \xi + \delta$, 则

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\zeta)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} - e^{-2\pi i \langle x, \xi + \delta \rangle}) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |1 - e^{-2\pi i \langle x, \delta \rangle}| dx. \end{aligned}$$

由于被积函数 $|f(x)| \cdot |1 - e^{-2\pi i \langle x, \delta \rangle}|$ 可被可积函数 $2|f(x)|$ 控制, 故由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |1 - e^{-2\pi i \langle x, \delta \rangle}| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\delta \rightarrow 0} |f(x)| |1 - e^{-2\pi i \langle x, \delta \rangle}| dx = 0.$$

于是我们有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|\xi - \zeta| < \delta} |\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\zeta)| = 0.$$

这就证明了一致收敛.

(3) 根据公式

$$\mathcal{F}(\tau_h f)(\xi) = e^{2\pi i \langle h, \xi \rangle} (\mathcal{F} f)(\xi),$$

我们有

$$|e^{2\pi i \langle h, \xi \rangle} - 1| |(\mathcal{F} f)(\xi)| = |\mathcal{F}(\tau_h f - f)(\xi)| \leq \|\tau_h f - f\|_{L^1} \quad (1)$$

对任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 成立. 因此当 $\xi \rightarrow \infty$ 时, 可选择 $h_\xi = -\xi/2|\xi|^2$, 则 $h_\xi \rightarrow 0$ 并且

$$|e^{2\pi i \langle h, \xi \rangle} - 1| = |e^{-\pi i} - 1| = 2.$$

代入 (1) 式,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} 2 |(\mathcal{F} f)(\xi)| \leq \lim_{\xi \rightarrow \infty} \|\tau_{h_\xi} f - f\|_{L^1} = 0.$$

证毕. □

我们接下来着手考虑 Fourier 逆变换的问题. 注意上面的论证说明 $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, 该条件和 L^1 性质是互不蕴含的. 比如之前的例 2.4.2 中就说明了 L^1 函数的 Fourier 变换未必是 L^1 的, 刚刚我们也论证了 L^1 函数未必有原像. 如果我们直接对 $f \in L^1$ 考虑 $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(x)$, 会得到

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle y, \xi \rangle} dy \right) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} d\xi \\ &\stackrel{\text{(Fubini?)}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle \xi, x-y \rangle} d\xi \right) dy. \end{aligned}$$

函数 $e^{-2\pi i \langle x, y-\xi \rangle}$ 对 x 显然是不可积的, 因此这里不能应用 Fubini 定理交换求和! 如果形式地考虑

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle \xi, y \rangle} d\xi,$$

那么就应该有 $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = (f * g)(x)$ “恒成立”, 但我们知道在 L^1 上卷积不存在单位元, 所以不会有我们想要的结论出现.

修补方法是采用卷积核逼近. 首先我们可以发现 Fourier 变换和卷积是两种非常相容的运算:

Proposition 2.4.6. 对任意 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).$$

Proof. 直接拆开即可.

$$\begin{aligned}
 \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy \right) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y, \xi \rangle} f(y) e^{-2\pi i \langle x - y, \xi \rangle} g(x - y) dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle y, \xi \rangle} dy \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(z) e^{-2\pi i \langle z, \xi \rangle} dz \\
 &= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).
 \end{aligned}$$



从而物理空间的卷积在频率空间中就反映为乘法. (注意, 我们还没有 $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$)

Corollary 2.4.7. $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中不存在单位元 e , 使得

$$f * e = f, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), .$$

Proof. 只需要将两边都施加 Fourier 变换, 就得到 $\widehat{f} \cdot \widehat{e} = \widehat{f}$. 取 f 处处非零, 就可知 $\widehat{e} = 1$, 这和 Riemann-Lebesgue 引理矛盾.



Lemma 2.4.8 (Parseval). 对 $f \in L_x^1(\mathbb{R})$ 以及 $g \in L_\xi^1(\mathbb{R})$ (表示它们是函数空间和频率空间的函数), 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

Proof. 直接将左边展开:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \right) g(\xi) d\xi \\
 (\text{Fubini}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi \right) f(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x) f(x) dx.
 \end{aligned}$$

证毕.



我们现在来证明:

Theorem 2.4.9 (Fourier 反演). 若 $f \in L_x^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\widehat{f} \in L_\xi^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = f, \quad \text{a.e.}$$

即 (注意如果没有 $\widehat{f}$ 的条件下面的积分甚至无法定义)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} d\xi = f(x), \quad \text{a.e.}$$

Proof. 考虑 Gauss 函数 $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$, 可用它建构一个 Friedrichs 光滑化核 (ref. 上学期笔记 p30)

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

则 $\{g_\varepsilon\}$ 是一族恒同逼近核. 我们先对 $f * g_\varepsilon$ 证明结论成立: 关键在于利用 2.4.6 和 2.4.8, 可让 g 吃掉所有性质而不需要 f 的任何信息.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f * g_\varepsilon)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f * g_\varepsilon}(\xi) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} d\xi \\ (2.4.6) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \widehat{g_\varepsilon}(\xi) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} d\xi. \end{aligned}$$

由于 $\widehat{g} = g$, 因此

$$\begin{aligned} \widehat{g_\varepsilon}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} g(\varepsilon^{-1}x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \\ (y = \varepsilon^{-1}x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i \langle y, \varepsilon \xi \rangle} dy = \widehat{g}(\varepsilon \xi) = g(\varepsilon \xi). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f * g_\varepsilon)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\varepsilon \xi) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} d\xi \\ (\text{Parseval}) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (\widehat{g(\varepsilon \cdot)} e^{2\pi i \langle \cdot, x \rangle})(y) dy. \end{aligned}$$

计算后者的 Fourier 变换, 我们得到

$$\begin{aligned} (\widehat{g(\varepsilon \cdot)} e^{2\pi i \langle \cdot, x \rangle})(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon \xi) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} e^{-2\pi i \langle \xi, y \rangle} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon \xi) e^{-2\pi i \langle \xi, y-x \rangle} d\xi \\ (\theta = \varepsilon \xi) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\theta) e^{-2\pi i \langle \theta, \frac{y-x}{\varepsilon} \rangle} d\theta \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \widehat{g}\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon^n} g\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) = g_\varepsilon(y-x). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f * g_\varepsilon)) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g_\varepsilon(y-x) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g_\varepsilon(x-y) dy = (f * g_\varepsilon)(x). \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则 $(f * g_\varepsilon)(x) \rightarrow f(x)$, a.e. LHS 则利用控制收敛定理得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\varepsilon \xi) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(0) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x).$$

所有两边几乎处处相等, 证毕. $\square$

我们接下来寻找一个较好的函数空间, 使得该空间包含很好的函数, 并且在该空间上 Fourier 变换是双射.

Definition 2.4.10 (Schwartz 空间, 速降函数). 定义

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f| < +\infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n. \right\}$$

注意这里 α, β 均使用多重求和记号. 将 $S(\mathbb{R}^n)$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的 **Schwartz 空间**, $f \in S(\mathbb{R}^n)$ 称为**速降函数**或者 Schwartz 函数.

一句话概括, 速降函数满足任意阶导数按任意阶多项式倒数收敛.

速降函数空间是保我们常见的运算的.

Proposition 2.4.11. $S(\mathbb{R}^n)$ 满足如下性质:

- $S(\mathbb{R}^n)$ 是一个线性空间, 所有 C_0^∞ 函数都是速降的, 所有速降函数都是 L^p 可积的. (这是因为 $|f(x)|$ 可被 $\frac{M}{(1+|x|)^n}$ 所控制, 后者可做到 L^p 可积)
- 若 $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, 则 $fg \in S(\mathbb{R}^n)$, $f * g \in S(\mathbb{R}^n)$.
- 若 $f \in S(\mathbb{R}^n)$, 则 $\partial^\alpha f \in S(\mathbb{R}^n)$, $x^\alpha f \in S(\mathbb{R}^n)$.
- 若 $f \in S(\mathbb{R}^n)$, 则 $\tau_h(f), D_\delta(f) \in S(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.4.12 (速降函数的 Fourier 变换还是速降函数). 若 $f \in S(\mathbb{R}^n)$, 则 $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Proof. 首先根据 $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1$ 可知 Fourier 变换可定义. 如果一个函数 g 能写为某个 $h \in L^1$ 做 Fourier 变换后的结果, 则 $\|g\|_{L^\infty} \leq \|h\|_{L^1}$. 根据命题 2.4.4 的 (iv) 和 (v),

$$\mathcal{F}(\partial_k f)(\xi) = 2\pi i \xi_k \hat{f}(\xi), \quad -2\pi i \mathcal{F}(x_k f)(\xi) = (\partial_k \hat{f})(\xi).$$

所以函数

$$\xi_k \hat{f} = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi i} \partial_k f\right), \quad \partial_k \hat{f} = \mathcal{F}(-2\pi i x_k f).$$

由于 $f \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \partial_k f \in S(\mathbb{R}^n), x_k f \in S(\mathbb{R}^n)$, 从而 $\xi_k \hat{f}$ 和 $\partial_k \hat{f}$ 都能被写为某个速降函数的 Fourier 变换后的结果. 因此我们可归纳得到任何的 $x^\alpha \partial^\beta \hat{f}$ 都能被写为某个速降函数 Fourier 变换下的结果. 故所有 $x^\alpha \partial^\beta \hat{f}$ 的 L^∞ 范数均有限. 这就证出了 $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$. □

Proposition 2.4.13. Fourier 变换限制在速降函数空间上是双射, 其逆确为 $\mathcal{F}^{-1}$.

Proof. 由于 $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1$, 故只要 $f \in S(\mathbb{R}^n)$ 就满足 2.4.9 的适用条件. 又根据 $S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty$ 可知几乎处处收敛能提升为逐点收敛. 这意味着在 $S(\mathbb{R}^n)$ 上有 $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \text{id}$, 根据定义有

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(\xi) = (\mathcal{F} f)(-\xi).$$

设反射算子 $R: (Rf)(x) = f(-x)$, 则 $\mathcal{F}^{-1} = R \circ \mathcal{F}$. 因此

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = R.$$

这给出 $\mathcal{F}$ 既单又满, 从而是双射, 并且 $\mathcal{F}^{-1} = R \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ R$ 是它的逆. □

Remark. 与 Fourier 级数中命题 1.3.2 类似, $\mathcal{F}$ 实际上在整个 L^1 上都是单射.

Proposition 2.4.14. 若 $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, 则 $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

Proof. 根据 2.4.6 有 $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$. 从而对任意的 $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}((\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g)) = (\mathcal{F}^2 f)(\mathcal{F}^2 g) = R(f)R(g) = R(fg).$$

两边作用 $\mathcal{F}$ 得到:

$$R((\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g)) = \mathcal{F}R(fg) = R\mathcal{F}(fg).$$

从而根据 $R^2 = \text{id}$ 可知

$$(\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g) = \mathcal{F}(fg).$$

证毕.



Theorem 2.4.15 (Plancherel 公式). 若 $f \in S(\mathbb{R}^n)$, 则 $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$.

Proof. 定义

$$g(\xi) = \overline{(\mathcal{F}f)(\xi)} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx = \mathcal{F}^{-1} \overline{f}(\xi).$$

则

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}f\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(\xi) \overline{(\mathcal{F}f)(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi \\ (\text{Parseval}) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} \overline{f})(x) dx = \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

证毕.



接下来的公式在理论和应用中都很重要:

Proposition 2.4.16 (Poisson 求和公式). 若 $f \in S(\mathbb{R})$, 则

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)(n) e^{2\pi i n x}.$$

特别地, 当 $x = 0$ 时

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)(n).$$

注意这里不写 $\widehat{f}$ 是为了和 Fourier 系数 $\widehat{f}(n)$ 区分开来. 或者说, 这个命题能看做是周期函数 Fourier 级数性质的推广.

Proof. 考虑函数

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n).$$

根据 f 速降, 上式显然良定且连续可微, 并且是周期为 1 的周期函数. 从而我们可以考虑其 Fourier 系数 (注意这里周期不是 2π . 回忆 Fourier 系数通过和标准正交基作内积得到, 周期为 1 时 $\{e^{2k\pi i x}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是标准正交基)

$$\widehat{F}(k) = \int_0^1 F(x) e^{-2k\pi i x} dx,$$

它满足

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{F}(k) e^{2k\pi i x}.$$

因此我们只需证明 $(\mathcal{F}f)(n) = \widehat{F}(n)$.

$$\begin{aligned} \widehat{F}(n) &= \int_0^1 F(x) e^{-2n\pi i x} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) e^{-2n\pi i x} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x) e^{-2n\pi i (x-k)} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(x) e^{-2n\pi i x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2n\pi i x} dx = (\mathcal{F}f)(n). \end{aligned}$$

证毕. 

Theorem 2.4.17 (Heisenberg). 若 $f \in S(\mathbb{R})$ 并且 $\|f\|_{L^2} = 1$, 则

$$4\pi \|xf\|_{L^2} \|\widehat{\xi f}\|_{L^2} \geq 1.$$

等号成立当且仅当 $f = Ae^{-Bx^2}$, $B > 0$, $A^2 = \sqrt{2B\pi^{-1}}$.

Proof. 根据 2.4.4 (iv) 可知求导会产生 $\widehat{\xi f}$ 这样的分量:

$$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi).$$

从而

$$\|\widehat{\xi f}\|_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f'}\|_{L^2} = \|f'\|_{L^2}.$$

此步用到了 Plancherel 公式 2.4.15. 从而由 Cauchy 不等式。

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= 2 \|xf\|_{L^2} \|f'\|_{L^2} \geq 2 |\langle xf, f' \rangle| \geq 2 \left| \int_{\mathbb{R}} xf(x) f'(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} x(f^2)' dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} f^2 dx \right| = \|f\|_{L^2}^2 = 1. \end{aligned}$$

证毕. 

Definition 2.4.18 (Radon 变换). 假设 $\omega \in S^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位向量, 则对任意 $t \in \mathbb{R}$, 定义

$$P_{t,\omega} := \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, \omega \rangle = t\}.$$

则 $P_{t,\omega}$ 是一个垂直于 ω 的 (不一定过原点) 的平面. 对 $f \in S(\mathbb{R}^3)$, 定义 f 的 Radon 变换为

$$\mathcal{R}(f)(t, \omega) = \int_{P_{t,\omega}} f.$$

直观来看, $\mathcal{R}(f)$ 总结了所有二维方向上的信息 (每个平面上的信息之和), 问题是用这些信息如何重构出整个 f . (或者考虑二维情形, 我们知道每条直线上的信息, 要还原出整个平面. 这更符合“实际应用”的领域: 一条直线可被看作是一条“X-射线”, 每条射线可以从频率上读取这条射线上的能量和的信息, 我们要从这些数据分析出整个“图像”是长什么样的.)

其中为了计算曲面面积, 固定 ω , 取单位向量 e_1, e_2 , $\{\omega, e_1, e_2\}$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基.

$$\int_{P_{t,\omega}} f = \int_{\mathbb{R}^2} f(t\omega + u_1 e_1 + u_2 e_2) du_1 du_2.$$

Theorem 2.4.19 (Central Slice Theorem). 给定 $f \in S(\mathbb{R}^3)$, 对任意 $r \in \mathbb{R}$ 和 $\omega \in S^2$ 有

$$\widehat{f}(r\omega) = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{R}f)(t, \omega) e^{-2\pi i t r} dt.$$

Proof.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{R}f)(t, \omega) e^{-2\pi i t r} dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(t\omega + u_1 e_1 + u_2 e_2) du_1 du_2 \right) e^{-2\pi i t r} dt \\ (\text{Fubini}) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(t\omega + u_1 e_1 + u_2 e_2) e^{-2\pi i \langle t\omega + u_1 e_1 + u_2 e_2, r\omega \rangle} dt du_1 du_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{2\pi i \langle x, r\omega \rangle} dx \\ &= \widehat{f}(r\omega). \end{aligned}$$



此时我们可用 Fourier 逆变换来重建 f .

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi \\ (\text{同时展开, 对球面求和}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{S^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}f(t, \omega) e^{-2\pi i t r} dt \right) r^2 e^{2\pi i \langle x, r\omega \rangle} dr d\omega. \end{aligned}$$

我们把外面的 r 放到关于 t 的积分内.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}f(t, \omega) e^{-2\pi i t r} r^2 dt &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t^2 \mathcal{R}(f))(t, \omega) e^{-2\pi i t r} dt \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}_t(\partial_t^2 \mathcal{R}(f)(t, \omega))(r, \omega). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{S^2} (\widehat{\partial_t^2 \mathcal{R}(f)})(r, \omega) e^{2\pi i \langle x, r\omega \rangle} dr d\omega \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\widehat{\partial_t^2 \mathcal{R}(f)})(r, \omega) e^{2\pi i r \langle x, \omega \rangle} dr \right) d\omega \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} (\partial_t^2 \mathcal{R}(f))(\langle x, \omega \rangle, \omega) d\omega. \end{aligned}$$

其中最后一步是因为这是一个 Fourier 逆变换, 把 $(\widehat{\partial_t^2 \mathcal{R}(f)})$ 打回 $\partial_t^2 \mathcal{R}(f)$. 这便是 **Radon 变换**, 它的计算相比一开始的积分就要简单不少.

3 分布理论

分布理论是更广泛的一类空间, 比如我们之前说不存在一个函数 e 是卷积的单位元, 满足 $f * e = f$, 但是这样的 e 更广泛地可用作为一个分布, 或者说广义函数出现.

3.1 定义和例子

Definition 3.1.1. 假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, 给定紧集 $K \subset \Omega$, 用 $C_K^\infty(\Omega)$ 表示紧支集在 K 上的光滑函数构成的集合.

$$C_K^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(f) \subset K\}.$$

记 $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ 是所有有紧支集的函数构成的集合, 称为**试验函数**.

Definition 3.1.2. Ω 上的**分布** (或称广义函数) 指的是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的线性泛函

$$u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle.$$

(这里使用了内积的符号, 实际上我们更希望将其理解为一个配对而不是一个作用于另一个上) 满足对任意紧集 $K \subset \Omega$, 存在非负整数 p 和常数 C 使得对任意 $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$ 有

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}.$$

我们要在 $C_K^\infty(\Omega)$ 上定义是因为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 不是良好的 Banach 空间. 称不依赖于 K 的最小的满足要求的 p (C 仍可依赖于 K 的选取) 为 u 的**阶**. 将 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的全体分布构成的集合记为 $\mathcal{D}'(\Omega)$. (这里采用的记号类似于求导, 实际上我们可以想象它是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 的对偶空间 (在无穷维时对偶空间总比原空间大), 又或者可以想象“在某处求导”就是一个线性泛函)

这种“线性泛函”或者说广义函数的思想在之前是出现过的, 比如对 L^p 空间中的函数 f , 可定义 $\langle f, \cdot \rangle : L^{p'} \rightarrow \mathbb{C}$, $g \mapsto \int fg$. 这就是一个**连续的**线性泛函, 其中泛函连续的定义为

$$|\langle f, g \rangle| \leq C \cdot \|g\|.$$

在 L^p 空间中有弱收敛的概念 (ref. 周民强 §6.6)

Definition 3.1.3 (弱收敛). 称 $\{g_k\}_{k \geq 1} \subset L^p$ 弱收敛到 g , 如果对任意 $f \in L^{p'}$ 均有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k f = \int g f.$$

可以看到弱收敛实际上就是说 g_k 作为一个线性泛函收敛到 g . 我们在泛函上就可定义这样的收敛性:

Proposition 3.1.4 (泛函的收敛性). 对分布序列 $\{u_p\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, 称 u_p 收敛到 u , 如果对任意试验函数 φ 均有

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \langle u_p, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle.$$

接下来我们给出一些分布的例子.

Example 3.1.5 (Dirac 函数). 对任意 $a \in \Omega$, 定义 $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 满足

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

即“在 a 处取值”的泛函. 则显然有对任意 K ,

$$|\langle \delta_a, \varphi \rangle| = |\varphi(a)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(K)}.$$

那么可取 $p = 0$, 即 δ_a 的阶为 0.

Example 3.1.6 (局部可积函数). 对任意 $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, 定义

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx.$$

则对任意紧集 $K \subset \Omega$, $f|_K \in L^1(K)$, 从而

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| = \left| \int_K f(x) \varphi(x) \, dx \right| \leq \|f\|_{L^1(K)} \|\varphi\|_{L^\infty(K)}.$$

可取 $C = \|f\|_{L^1(K)}$, $p = 0$, 从而 T_f 的阶为 0. 这个例子告诉我们分布的确是某种“广义”的函数, 它包含绝大部分好的金典函数. 特别地, $f \mapsto T_f$ 给出嵌入 $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. 今后我们直接用 $\langle f, \varphi \rangle$ 来表示上面所说的 $\langle T_f, \varphi \rangle$.

Proposition 3.1.7. 对任意 $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \, dx = 1,$$

定义

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

(此即 Friedrichs 光滑化核, ref. 上学期笔记 p30. 这是一族恒同逼近核, 它在传统意义下不可能是收敛的.) 那么在分布的意义下有 $\phi_\varepsilon \rightarrow \delta_0$.

Proof. 我们知道 $\{\phi_\varepsilon\}$ 是光滑化核. 从而对任意 $f \in C^\infty(K)$ 均有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * \phi_\varepsilon)(0) = f(0)$. (如果只是可积函数那么只在 Lebesgue 点处有收敛) 把它展开就得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x) f(-x) dx = f(0).$$

用 $f(x)$ 替代 $f(-x)$ 所得结果相同. 从而上式给出

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \phi_\varepsilon, f \rangle = f(0) = \langle \delta_0, f \rangle.$$

证毕. $\square$

Example 3.1.8 (Radon 测度). 设 μ 是 $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ 上的测度, 其中 $\mathcal{B}(\Omega)$ 是 Borel- σ 代数. 若对任意 $K \subset \Omega$, 均有 $\mu(K) < +\infty$, 则称这种测度为 Radon 测度. 任给一个 Radon 测度 μ , 可定义分布 T_μ :

$$\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \varphi d\mu.$$

则 T_μ 是 0 阶分布, 因为对任意 $K \subset \Omega$ 和 $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, 有

$$|\langle T_\mu, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(K)} \int_K 1 d\mu = \mu(K) \|\varphi\|_{L^\infty(K)}.$$

因此可取 $C = \mu(K)$ 以及 $p = 0$. Radon 测度有很多例子, 比如第一学期的 Riemann-Stieltjes 积分 $\int f d\mu$ 中 μ 由一个递增函数给出, 我们为每个方块 $[a, b]$ 定义其测度为 $\mu(b) - \mu(a)$, 通过逼近就能给出 Borel 代数中每个集合的测度. 然后有测度就可定义积分. 之前的两个例子也可以包含在其中, 比如对 δ_a 就可定义测度

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & a \notin A; \\ 1, & a \in A. \end{cases}$$

对每个正函数 f , 可定义测度

$$\mu(A) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A f(x) dx$$

并由此定义积分. 事实上, Riesz 表示定理告诉我们, 每个 0 阶分布都可由某个 Radon 测度表示.

Example 3.1.9 (x^{-1} 的主值部分). 考虑函数 x^{-1} , 则 $x^{-1} \notin L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$. 因此我们不能用之前例子里的方式来定义分布, 只能采用逼近的想法. 考虑

$$\begin{aligned} \langle x^{-1} \chi_{\{|x| \geq \varepsilon\}}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx. \end{aligned}$$

由于 φ 光滑并且 $\varphi(0) - \varphi(-0) = 0$, 故

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}$$

也是光滑函数, 因此

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

于是可以定义

$$\left\langle \text{pv} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

根据 Lagrange 中值定理,

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| = \left| \frac{2x\varphi'(\xi)}{x} \right| = 2|\varphi'(\xi)| \leq 2\|\varphi'\|_{L^\infty(K)}.$$

因此对 $\varphi \in C^\infty(K)$, 存在 $M > 0$ 使得

$$\left| \left\langle \text{pv} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle \right| \leq \left| \int_0^M 2\|\varphi'\|_{L^\infty(K)} dx \right| \leq 2M \cdot \|\varphi'\|_{L^\infty(K)}.$$

所以 $\text{pv} \frac{1}{x}$ 是阶不超过 1 的分布.

接下来我们来考虑分布的性质. 首先 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 是线性空间, 可做加减法和数乘操作.

Definition 3.1.10 (分布的偏导数). 对 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 和多重指标 α , 定义

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

这里的求导的确核金典意义下的求导是相容的, 比如当 u 是正则性足够好的金典函数时, 根据分部积分, 对 $\varphi \in C^\infty(K)$ 有

$$\begin{aligned} \langle u', \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} u'(x) \varphi(x) dx = u(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi'(x) dx \\ &= -\langle u, \varphi' \rangle. \end{aligned}$$

多元的情形是类似的. 我们现在证明 $\partial^\alpha u$ 的确是一个分布: 对任意紧集 K 存在 p 和 C 使得

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\beta| < p} \|\partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(K)}.$$

所以

$$\begin{aligned} |\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle| &= \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle \leq C \sup_{|\beta| < p} \|\partial^\beta \partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)} \\ &\leq C \sup_{|\gamma| \leq p+|\alpha|} \|\partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty(K)}. \end{aligned}$$

从而如果 u 的阶为 p , 那么 $\partial^\alpha u$ 的阶为 $p + |\alpha|$.

Example 3.1.11 (Heaviside 函数). 考虑

$$H(x) = \chi_{\{x \geq 0\}} = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

作为分布有 $H(x)' = \delta_0$. 这是因为对任意 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle H(x)', \varphi \rangle = -\langle H(x), \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -(-\varphi(0)) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Example 3.1.12. 我们证明作为分布有

$$(\log |x|)' = \text{pv} \frac{1}{x}.$$

这是因为对任意 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle (\log |x|)', \varphi \rangle &= -\langle \log |x|, \varphi' \rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \log |x| \varphi'(x) dx \\ &= -\int_0^\infty \log x (\varphi'(x) - \varphi'(-x)) dx \\ &= -(\log x (\varphi(x) - \varphi(-x))) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^\infty (\log x)^{-1} (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Definition 3.1.13 ($C^\infty(\Omega)$ -模结构). 对任意光滑函数 $f \in C^\infty(\Omega)$ 与分布 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 可定义

$$\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle.$$

这样可将 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 实现为一个 $C^\infty(\Omega)$ -模. 一方面对 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 总有 $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 其次

$$\begin{aligned} |\langle u, f\varphi \rangle| &\leq C \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha (f\varphi)\|_{L^\infty(K)} \\ &\leq C \sup_{|\alpha|+|\beta| \leq p} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(K)} \|\partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(K)} \\ &\leq C \sup_{|\beta| \leq p} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(K)} \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(K)}. \end{aligned}$$

fu 的阶与 u 相同. 特别地, 导数满足 Leibniz 法则

$$\begin{aligned} \langle \partial(fu), \varphi \rangle &= -\langle fu, \partial\varphi \rangle = -\langle u, f(\partial\varphi) \rangle \\ &= -\langle u, \partial(f\varphi) - (\partial f)\varphi \rangle = \langle \partial u, f\varphi \rangle + \langle (\partial f)u, \varphi \rangle \\ &= \langle f(\partial u) + (\partial f)u, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

习题课 1: 2025/9/18 未补全

习题课的内容是关于 L^p 空间性质的补充.

Proposition 3.1.14.

$$\log(tx + (1-t)y) \geq t \log x + (1-t) \log y.$$

Proof. 直接根据 Jensen 不等式可得, 或者也可以展开为

$$x^t y^{1-t} \leq tx + (1-t)y. \quad (*)$$



Proposition 3.1.15 (Hölder). 假设 $f \in L^p, g \in L^q$, 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 那么 $fg \in L^1$ 并且 $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$.

Proof. 如果 $\|f\|_{L^p} = 0$ 或者 $\|g\|_{L^q} = 0$, 那么 $f = 0, \text{ a.e.}$ 或者 $g = 0, \text{ a.e.}$ 从而 $fg = 0, \text{ a.e.}$, 就做完了.

下面考虑 $\|f\|_{L^p} \neq 0$ 且 $\|g\|_{L^q} \neq 0$ 的情形, 记

$$f_0 = \frac{f}{\|f\|_{L^p}}, \quad g_0 = \frac{g}{\|g\|_{L^q}}.$$

对 f_0, g_0 逐点使用不等式 (*), 得到

$$|f_0 g_0| \leq t |f_0|^{\frac{1}{t}} + (1-t) |g_0|^{\frac{1}{1-t}}.$$

令 $t = \frac{1}{p}$, 则 $1-t = \frac{1}{q}$, 上式化为

$$|f_0 g_0| \leq \frac{1}{p} |f_0|^p + \frac{1}{q} |g_0|^q.$$

进行积分:

$$\int |f_0 g_0| \, dm \leq \frac{1}{p} \int |f_0|^p \, dm + \frac{1}{q} \int |g_0|^q \, dm = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

这就给出

$$\int |fg| \, dm \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

证毕.



Corollary 3.1.16. $L^p \cap L^q \subset L^r, 1 \leq p < r < q$.

Proof. 对 f 本身使用 Hölder 不等式: 首先存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} = \frac{1}{r}. \quad (1)$$

下证明对 $1 \leq p < r < q$ 总有

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^\theta \|f\|_{L^q}^{1-\theta},$$

即

$$\int |f^r| dm \leq \left(\int |f^p| dm \right)^{\frac{r\theta}{p}} \left(\int |f^q| dm \right)^{\frac{r(1-\theta)}{q}}. \quad (2)$$

我们想利用 Hölder 不等式, 但是 p 和 q 不是对偶的. 所以我们要做以下两件事:

- 选取对偶的 $\tilde{p}, \tilde{q}$.
- 选取函数 g, h 使得 $gh = f^r$, 对其使用 Hölder 不等式 $\|gh\|_{L^1} \leq \|g\|_{L_{\tilde{p}}} \|h\|_{L_{\tilde{q}}}$ 得到需证式.

一个非常自然的想法就是照着 (2) 的系数选择 $\tilde{p} = \frac{p}{r\theta}$ 和 $\tilde{q} = \frac{q}{r(1-\theta)}$. (我们看到根据 (1) $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 的确是对偶的, 这其实从另一方面解释了之前为什么会选择这样的 θ) 再选择 g, h 使得 $g^{\tilde{p}} = f^p$, $h^{\tilde{q}} = f^q$, 即 $g = f^{r\theta}$, $h = f^{r(1-\theta)}$. 现在把所有事情展开就得到结果.

$$\begin{aligned} \int |f^r| dm &= \int |gh| dm \leq \left(\int |g^{\tilde{p}}| dm \right)^{1/\tilde{p}} \left(\int |h^{\tilde{q}}| dm \right)^{1/\tilde{q}} \\ &= \left(\int |f^p| dm \right)^{\frac{r\theta}{p}} \left(\int |f^q| dm \right)^{\frac{r(1-\theta)}{q}}. \end{aligned}$$

证毕. 

Corollary 3.1.17. $L^r \subset L^p + L^q$, $1 \leq p < r \leq q$.

Proof. 我们借助 $L^1 \cap L^r \subset L^p$ 和 $L^\infty \cap L^r \subset L^q$ 来完成分解:

$$\begin{aligned} h &= f \cdot \mathbf{1}_{\{|f| \leq 1\}} \in L^q; \\ g &= f \cdot \mathbf{1}_{\{|f| > 1\}} \in L^p. \end{aligned}$$

一方面, h 显然是本性有界的, 所以落在 L^∞ 中, 因此 h 落在 $L^\infty \cap L^r \subset L^q$ 中.

另一方面, $|g^r| \geq |g|$ 恒成立, 所以

$$\|g\|_{L^r} = \left(\int |g^r| dm \right)^{1/r} \geq \left(\int |g| dm \right)^{1/r} = \|g\|_{L^1}^{1/r}.$$

故 $\|g\|_{L^1} < +\infty$, 即 $g \in L^1 \cap L^r \subset L^p$. 证毕. 

Proposition 3.1.18 (Minkowski). 若 $f, g \in L^p$, 则 $f + g \in L^p$. 并且它们的范数满足

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Proof. 证明是利用好函数逼近. 设 $h_N = |f + g|^{p-1} \chi_{E_N}$, 其中

$$E_N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \leq N, |g(x)| \leq N, |x| \leq N\}.$$

从而 h_N 是紧支有界函数, 从而一定可积, 故 $h_N \in L^q$. 根据 Hölder 不等式,

$$\int |f + g| h_N dm \leq \int |f| h_N dm + \int |g| h_N dm \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \|h_N\|_{L^q}.$$

一方面,

$$\|h_N\|_q^q = \int |h_N|^q dm = \int |f+g|^p \chi_{E_N} dm,$$

所以上式其实是

$$\|h_N\|_q^{q-1} \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^q.$$

最后令 $N \rightarrow \infty$ 会得到 $|h_N|^q \rightarrow |f+g|^{q(p-1)} = |f+g|^p$, 根据控制收敛定理就有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int |h_N|^q dm = \int |f+g|^p dm.$$

这就得到了 $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$.



Remark. Minkowski 不等式保证了 L^p 是赋范线性空间.

Proposition 3.1.19 (Integral Minkowski). 假设 $0 < p < q < \infty$, 则

$$\| \|f(x, y)\|_{L_x^p} \|_{L_y^q} \leq \| \|f(x, y)\|_{L_y^q} \|_{L_x^p}.$$

Proof. 把上式展开就得到

$$\left(\int \left(\int |f(x, y)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int \left(\int |f(x, y)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

令 $G(x) = \|f(x, y)\|_{L_y^q}$, 待定系数并利用 Hölder 不等式:

$$\int |f(x, y)|^p G^{-r} G^r dx \leq \left(\int |f(x, y)|^{ps} G^{-rs} dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int G(x)^{rt} dx \right)^{\frac{1}{t}}.$$

取 $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$, $rt = p$, $ps = q$, 那么上式化为

$$\int |f(x, y)|^p dx \leq \left(\int |f(x, y)|^q G(x)^{-rs} dx \right)^{\frac{1}{s}} \|G\|_{L^p}^{\frac{p}{t}}.$$

取 q/p 次幂然后再次积分:

$$\begin{aligned} \int \left(\int |f(x, y)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} dy &\leq \|G\|_{L^p}^{\frac{q}{t}} \int \left(\int |f(x, y)|^q G^{-rs}(x) dx \right) dy \\ (\text{Fubini}) &= \|G\|_{L^p}^{\frac{q}{t}} \int G(x)^{-rs} \int G^{-rs} \left(\int |f(x, y)|^q dy \right) dx \\ &= \|G\|_{L^p}^{\frac{q}{t}} \int G^{q-rs}(x) dx. \end{aligned}$$



Corollary 3.1.20.

$$\int \|f\|_{L_x^p} dy \geq \left\| \int f(x, y) dy \right\|_{L_x^p}.$$

Corollary 3.1.21. $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$, $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Proof. 我们证明一个简单情形:

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{L^p} &= \left\| \int f(t)g(x-t) \, dt \right\| \\ &\leq \int \|f(t)g(x-t)\|_{L_x^p} \, dt \leq \|f(t)\| \|g\|_{L^p} \, dt = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.\end{aligned}$$



Proposition 3.1.22 (Hardy). 对 $f \in L^p(\mathbb{R})$, 定义

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) \, dy.$$

那么 $F \in L^p(\mathbb{R})$, 并且 $\|F\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.

Proof. F 可以重写为

$$F(x) = \int_0^1 f(tx) \, dt.$$

所以

$$\|F\|_{L^p} \leq \int_0^1 \|f(tx)\|_{L_x^p} \, dt \leq \int_0^1 \|f\|_{L^p} \, dt = \|f\|_{L^p}.$$



4 Appendix A: Homeworks

4.1 第一次作业

Problem 1

假设 f 是 $[0, 2\pi]$ 上可积的复值函数. 证明, f 几乎处处是实值函数当且仅当对任意的 $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{f(k)} = \widehat{f(-k)}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}\widehat{f(-k)} &= \int_{S^1} f(x) e^{ikx} \frac{dx}{2\pi}, \quad \widehat{f(k)} = \overline{\int_{S^1} f(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi}} \\ &= \int_{S^1} \overline{f(x)} e^{ikx} \frac{dx}{2\pi}.\end{aligned}$$

这样条件成立当且仅当对函数 $g(x) = f(x) - \overline{f(x)}$, $\widehat{g(k)} = 0$ 对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 成立, 这等价于 $g(x) = 0$, a.e., 也等价于 f 几乎处处是实值函数. $\square$

Problem 2

假设 f, g 是 $[0, 2\pi]$ 上的可积函数. 证明卷积在频率可积上来看就是正常的乘积:

$$\widehat{f * g(k)} = 2\pi \widehat{f(k)} \widehat{g(k)}.$$

(这里的卷积没有自带的系数 $1/2\pi$.)

Proof. 直接计算.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \widehat{f * g(k)} &= \int_{S^1} f * g(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} \\ &= \int_{S^1} \left(\int_{S^1} f(y) g(x-y) \frac{dy}{2\pi} \right) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} \\ &= \int_{S^1} \int_{S^1} f(y) e^{-iky} \cdot g(x-y) e^{-ik(x-y)} \frac{dy}{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \\ (s = x - y, t = y) &= \int_{S^1} \int_{S^1} f(s) e^{-iks} \cdot g(t) e^{-ikt} \frac{ds}{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{S^1} f(s) e^{-iks} \frac{ds}{2\pi} \int_{S^1} g(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \\ &= \widehat{f(k)} \widehat{g(k)}.\end{aligned}$$

$\square$

Problem 3

f 是 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的奇函数. 它在 $[0, \pi]$ 上的定义为

$$f(x) = x(\pi - x).$$

证明, 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 我们都有

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^3}.$$

Proof. 我们知道如果 f 是绝对连续函数, 那么就有 Riemann-Lebesgue 引理成立. 而 f 绝对连续可推出 $f \cdot e^{ikx}$ 也是绝对连续的, 因此可对其使用 Riemann-Lebesgue 定理. 这就得到对 $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \int_{S^1} f(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{-ik} \left(\int_{S^1} f(x) (e^{-ikx})' \frac{dx}{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{ik} \int_{S^1} f'(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{ik} \widehat{f'}(k). \end{aligned}$$

回到原题, f 可定义在 S^1 上,

$$f'(x) = \begin{cases} \pi - 2x, & x \in [0, \pi]; \\ \pi + 2x, & x \in [-\pi, 0]. \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} -2, & x \in (0, \pi); \\ 2, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

由 $f, f' \in AC(S^1)$, 可以利用上面的公式, 得到

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(ik)^2} \widehat{f''}(k), \quad k \neq 0.$$

计算 $\widehat{f''}(k)$:

$$\begin{aligned} \widehat{f''}(k) &= \int_{-\pi}^0 2e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} - \int_0^{\pi} 2e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} \\ &= -4 \int_0^{\pi} e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4}{ik} (e^{-ik\pi} - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{ik\pi}, & 2 \nmid k, \\ 0, & 2 \mid k \end{cases}. \end{aligned}$$

又根据 f 是奇函数可知 $\widehat{f}(0) = 0$, 所以

$$\widehat{f}(0) = 0, \quad \widehat{f}(k) = \begin{cases} \frac{4}{ik^3\pi}, & 2 \nmid k, \\ 0, & 2 \mid k \end{cases}.$$

最后根据 $f \in C^1$ 可知 Fourier 系数逐点收敛到 f , 从而

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k \geq 1, 2 \nmid k} \frac{4}{ik^3\pi} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \\ &= \sum_{k \geq 1, 2 \nmid k} \frac{8i \sin(kx)}{ik^3\pi} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^3}. \end{aligned}$$

Problem 4

假设 f 是定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的奇函数, 在 $(0, \pi]$ 上取值为 $\frac{\pi-x}{2}$. 证明

$$\frac{\pi-x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}, \quad \forall x \in (0, \pi].$$

Proof. 由于 Fourier 系数只 a.e. 依赖于 f 的取值, 所以我们可以通过周期延拓, 认为 f 有 Fourier 级数. 注意到延拓后在 $(0, 2\pi)$ 上 f 的表达式就是 $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$. 因此

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} \\ &= -\frac{1}{ik} \cdot \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi-x}{2} e^{-ikx} \right) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{ik} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} \\ &= -\frac{1}{2ik\pi} \cdot \left(\frac{\pi-2\pi}{2} - \frac{\pi-0}{2} \right) = \frac{1}{2ik}, \quad k \neq 0. \end{aligned}$$

此外根据 f 是奇函数易得 $\hat{f}(0) = 0$. 由于 f 在每个 $x \in (0, \pi]$ 附近都是 C^1 的, 因此有逐点收敛性成立.

$$\frac{\pi-x}{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2ik} (e^{ikx} - e^{-ikx}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

证毕. $\square$

Problem 5

设 f 在 $\mathbb{R}$ 上是以 2π 为周期的函数, 它在 $[-\pi, \pi]$ 上的定义为

$$f(x) = |x|.$$

试计算 f 的 Fourier 系数, 并通过考虑 $f(0)$ 证明:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{6} \pi^2.$$

进一步证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{90} \pi^4.$$

Proof. 由 $f(x) \in AC(S^1)$ 以及

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0); \\ 1, & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

我们可以研究 $\tilde{f}'(x)$. 根据第 3 题中的结论, 对 $k \neq 0$,

$$\hat{f}'(k) = \begin{cases} \frac{2}{ik\pi}, & 2 \nmid k; \\ 0, & 2 \mid k \end{cases}.$$

容易计算得 $\widehat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$, 那么

$$\widehat{f}(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{f}(k) = \begin{cases} -\frac{2}{k^2\pi}, & 2 \nmid k; \\ 0, & 2 \mid k \end{cases}.$$

由于在 0 附近 f 是 Lipschitz 的, 所以 Fourier 级数在 0 处收敛到 $f(0) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) = \frac{\pi}{2} - 2 \sum_{k \geq 1, 2 \nmid k} \frac{2}{k^2\pi} \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

再考虑以 2π 为周期的偶函数 g , 在 $[0, \pi]$ 上取值为 $g(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi}{4}x^2$. 那么在 $[0, \pi]$ 上,

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi}{2}x, \quad g''(x) = x - \frac{\pi}{2}.$$

$g'(x)$ 是奇函数, 根据 $g'(0) = g'(\pi) = 0$ 知它也是 2π 周期函数. $g''(x)$ 是偶函数, 根据 $g''(0) = -\frac{\pi}{2}$, $g''(\pi) = \frac{\pi}{2}$ 可知 g'' 连续, 并且就是 $f - \frac{\pi}{2}$. 因此对 $k \neq 0$,

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{(\mathbf{i}k)^2} \widehat{g''}(k) = -\frac{1}{k^2} \cdot f(k) = \begin{cases} \frac{2}{k^4\pi}, & 2 \nmid k; \\ 0, & 2 \mid k. \end{cases}$$

另一方面, 计算 $\widehat{g}(0)$:

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi}{4}x^2 \right) \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{24}x^4 - \frac{\pi}{12}x^3 \right) \Big|_0^\pi = -\frac{\pi^3}{48}.$$

所以 $\widehat{g}(0) = -\frac{\pi^3}{24}$. g 在 0 附近 C^1 , 所以 Fourier 级数在 0 附近收敛到 $g(0) = 0$.

$$0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(k) = -\frac{\pi^3}{24} + 2 \sum_{k \geq 1, 2 \nmid k} \frac{2}{k^4\pi} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

又因为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16}{15} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{16}{15} \cdot \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$

证毕.



Problem 6

假设常数 $0 < \alpha < 1$, f 是 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的函数. 它在 $[0, 2\pi]$ 上的定义为

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-x)\alpha}.$$

通过计算它的 Fourier 系数, 证明

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(k + \alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin(\pi\alpha)^2}.$$

Proof. 直接计算 Fourier 系数:

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-x)\alpha} e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^{2\pi} e^{i((\pi-x)\alpha - kx)} \frac{dx}{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{-i(\alpha + k)} \left(e^{i((\pi-x)\alpha - kx)} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)} \cdot \frac{1}{-i(\alpha + k)} \cdot (e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}) \\ &= \frac{1}{2\sin(\pi\alpha)} \cdot \frac{1}{-i(\alpha + k)} \cdot (-2\sin(\pi\alpha)) \\ &= \frac{1}{\alpha + k}. \end{aligned}$$

而

$$\|f(x)\|_{L^2}^2 = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \frac{dx}{2\pi} \right) = \frac{\pi^2}{\sin(\pi\alpha)^2}.$$

所以根据 Parseval 恒等式,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(k + \alpha)^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|f(x)\|_{L^2}^2 = \frac{\pi^2}{\sin(\pi\alpha)^2}.$$



Problem 7

假设常数 $0 < \alpha < 1$, 通过计算函数 $\cos(\alpha x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 级数证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\alpha + k} + \frac{1}{\alpha - k} \right) = \frac{\alpha\pi - \sin(\alpha\pi)}{\alpha \sin(\alpha\pi)}.$$

Proof. 设 $f(x) = \cos(\alpha x)$. 首先来计算 $\langle e^{i\beta x}, e^{ikx} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle e^{i\beta x}, e^{ikx} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\beta x} e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\beta-k)x} \frac{dx}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{i(\beta - k)} e^{i(\beta-k)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{i(\beta - k)} \cdot (e^{i(\beta-k)\pi} - e^{-i(\beta-k)\pi}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{i(\beta - k)} \cdot 2i \sin((\beta - k)\pi) = \frac{(-1)^k \sin(\beta\pi)}{(\beta - k)\pi}. \end{aligned}$$

需求的 Fourier 系数就是

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{2}(\langle e^{i\alpha x}, e^{ikx} \rangle + \langle e^{-i\alpha x}, e^{ikx} \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^k \sin(\alpha\pi)}{(\alpha - k)\pi} + \frac{(-1)^k \sin(-\alpha\pi)}{(-\alpha - k)\pi} \right) \\ &= \frac{(-1)^k \sin(\alpha\pi)}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha - k} + \frac{1}{\alpha + k} \right).\end{aligned}$$

由于 f 在 0 附近 C^1 , 因此 Fourier 级数在 0 处收敛到 $f(0) = 1$. 从而

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \left(\frac{1}{\alpha - k} + \frac{1}{\alpha + k} \right) \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi} \left(\frac{2}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{\alpha - k} + \frac{1}{\alpha + k} \right) \right).\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha - k} + \frac{1}{\alpha + k} \right) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha\pi - \sin(\alpha\pi)}{\alpha \sin(\alpha\pi)}.$$

证毕.



Problem 8: 余元公式

对于 $0 < \alpha < 1$, 证明

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= B(\alpha, 1-\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha-k} \right).\end{aligned}$$

由此得到余元公式

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \quad \forall 0 < \alpha < 1.$$

Proof. 首先回顾 B 函数和 Γ 之间关系的证明:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \forall p, q > 0.$$

首先对 $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt$ 使用变量替换 $t = x^2$ 可得

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{2p-2} e^{-x^2} d(x^2) = 2 \int_0^{\infty} x^{2p-1} e^{-x^2} dx.$$

于是

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^{\infty} x^{2p-1} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} y^{2q-1} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{(0, \infty) \times (0, \infty)} x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= 4 \int_{(0, +\infty) \times (0, \frac{\pi}{2})} (r \cos \theta)^{2p-1} (r \sin \theta)^{2q-1} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \cdot 2 \int_0^{\infty} r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr.\end{aligned}$$

后者是 $\Gamma(p+q)$. 前者根据 B 函数的定义, 换元 $x = \sin^2 \theta$ 得到

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^{p-1} (\cos^2 \theta)^{q-1} d(\sin^2 \theta) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p-2} (\cos \theta)^{2q-2} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta. \end{aligned}$$

注意到 $\Gamma(1) = 1$, 故 $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = B(\alpha, 1-\alpha)$. 再证明第二步, 换元 $x = \frac{t}{1+t}$ 后得到

$$\begin{aligned} B(p, 1-p) &= \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{-\alpha} d\frac{t}{1+t} \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{-1}} \cdot \frac{1}{(1+t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt + \int_1^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1} + t^{-\alpha}}{1+t} dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty (-1)^k (t^{k+\alpha-1} + t^{k-\alpha}) dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{k+\alpha} t^{k+\alpha} + \frac{1}{k-\alpha+1} t^{k-\alpha+1} \right) \Big|_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{k+\alpha} + \frac{1}{k-\alpha+1} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha-k} \right) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}. \end{aligned}$$



Problem 9

证明连续函数的 Fourier 系数可以衰减地任意慢, 即任给正数序列 $\{b_k\}_{k \geq 1}$, $b_k \rightarrow 0$, 总存在 $[0, 2\pi]$ 上的连续函数 f , 使得存在无穷多个 $k \geq 0$ 满足 $|\hat{f}(k)| \geq b_k$.

Proof. 取 $\{b_k\}_{k \geq 1}$ 的子列 $\{b_{k_i}\}_{i \geq 1}$ 使得 $b_{k_i} \leq \frac{1}{2^i}$, 这样就有 $\sum b_{k_i} < +\infty$. 考虑函数

$$f(x) = \sum_{i=1}^\infty b_{k_i} \cdot e^{ik_i x}.$$

我们证明 $S_n(x) = \sum_{i=1}^n b_{k_i} \cdot e^{ik_i x}$ 是 L^∞ 中的 Cauchy 列, 这是因为对 $m > n \geq N$,

$$\|S_n(x) - S_m(x)\|_{L^\infty} = \left\| \sum_{i=n+1}^m b_{k_i} e^{ik_i x} \right\|_{L^\infty} \leq \sum_{i=n+1}^m |b_{k_i}| \leq \sum_{i \geq N} b_{k_i}.$$

再根据 $\sum b_{k_i} < +\infty$ 即得结论. 从而 $S_n(x)$ 一致收敛, f 是连续函数, 并且满足 $|\hat{f}(k)| = \langle f, e^{ikx} \rangle = b_{k_i}$. 这就证明了满足要求的 f 存在.



Problem 10: 等周不等式

假设 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是平面上连续可微的简单闭曲线, 周长为 ℓ , 围成区域面积为 A . 证明 $4\pi A \leq \ell^2$.

Proof. 我们为曲线选取弧长参数 dt , 则 $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ 恒成立. 由于缩放平面不会对需证式造成影响, 我们可以不妨设曲线长度 $\ell = 2\pi$, 只需证明 $A \leq \pi$. 根据 Stokes 公式, 设围成区域为 D , 则

$$\int_0^{2\pi} x(t)y'(t) dt = \int_{\partial D} x dy = \int_D 1 dx \wedge dy = A.$$

我们可把 x, y 看作定义在 S^1 上的函数, 根据 $x, y, x', y' \in C(S^1)$ 可知 $x, y, x', y' \in L^2(S^1)$. 我们在 L^2 空间下考虑:

$$A = \int_{S^1} x(t)y'(t) dt = 2\pi \cdot \langle x, y' \rangle. \quad (1)$$

根据 $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ 恒成立可知

$$\int_{S^1} x'(t)^2 + y'(t)^2 \frac{dt}{2\pi} = 1 \Rightarrow \|x'\|^2 + \|y'\|^2 = 1. \quad (2)$$

设 x, y 的 Fourier 系数分别为 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, 则 x' 和 y' 对应的 Fourier 系数分别为 $\{ika_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{ikb_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

代入 (2):

$$1 = \|x'\|^2 + \|y'\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (k^2 |a_k|^2 + k^2 |b_k|^2).$$

代入 (1):

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \overline{ikb_k} \leq 2\pi \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |ka_k b_k| \\ &\leq 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k| (|a_k|^2 + |b_k|^2) \\ &\leq 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \pi. \end{aligned}$$

证毕.



Problem 11

假设 $f(t)$ 是在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上定义的 Lebesgue 可积函数. 我们定义它的 Laplace 变换为:

$$(\mathcal{L}f)(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt} dt.$$

其中 $x > 0$. 证明

$$\mathcal{L}(f \bullet g)(x) = (\mathcal{L}f)(x)(\mathcal{L}g)(x).$$

这里卷积定义为

$$f \bullet g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x) dx.$$

Proof. 直接计算.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f \bullet g)(x) &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(y)g(t-y) dy \right) e^{-xt} dt \\ &= \int_{(t,y) \in (0,+\infty) \times (0,t)} f(y)g(t-y)e^{-xt} dt dy \\ (r=t-y, s=y) &= \int_{(r,s) \in \mathbb{R}_{>0}^2} f(s)g(r)e^{-x(r+s)} ds dr \\ &= \int_0^\infty f(s)e^{-xs} ds \cdot \int_0^\infty g(t)e^{-xt} dt = (\mathcal{L}f)(x)(\mathcal{L}g)(x). \end{aligned}$$



Problem 12

假设 f 是 $[0, 2\pi]$ 上的有界变差函数, 证明存在常数 C 使得对任意的整数 k 均有

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{1+|k|}.$$

Proof. 设 f 的全变差为 M , 则对 $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(k)| &= \left| \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx} dx \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi/k} (f(x) - f(x + \frac{\pi}{k}) + \dots + f(x + \frac{(2k-2)\pi}{k}) - f(x + \frac{(2k-1)\pi}{k}))e^{-ikx} dx \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/k} \left| f(x) - f(x + \frac{\pi}{k}) \right| + \dots + \left| f(x + \frac{(2k-2)\pi}{k}) - f(x + \frac{(2k-1)\pi}{k}) \right| dx \\ &\leq \int_0^{\pi/k} M dx = \frac{M\pi}{k}. \end{aligned}$$

同理可知对 $k < 0$ 也有 $|\widehat{f}(k)| \leq \frac{M\pi}{-k}$, 所以存在常数 C 对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 均满足

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{1+|k|}.$$



Problem 13

假设对某个常数 $0 < \alpha < 1$, f 是 $[0, 2\pi]$ 上的 C^α -Hölder 连续函数, 证明存在常数 C 使得

$$|\widehat{f}(k)| \leq C(1+|k|)^{-\alpha}.$$

Proof. 对 $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &= \left| \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi/k} (f(x) - f(x + \frac{\pi}{k}) + \cdots + f(x + \frac{(2k-2)\pi}{k}) - f(x + \frac{(2k-1)\pi}{k})) e^{-ikx} dx \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/k} |f(x) - f(x + \frac{\pi}{k})| + \cdots + |f(x + \frac{(2k-2)\pi}{k}) - f(x + \frac{(2k-1)\pi}{k})| dx \\ &\leq \int_0^{\pi/k} M \cdot k \left(\frac{\pi}{k}\right)^\alpha dx = \frac{M\pi^{\alpha+1}}{k^\alpha}. \end{aligned}$$

对 $k < 0$ 同理. 因此存在常数 C 使得对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 均有

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{(1+|k|)^\alpha}.$$



Problem 14

假设对某个常数 $0 < \alpha < 1$, f 是 $[0, 2\pi]$ 上的 C^α -Hölder 连续的周期函数. 证明 f 的 Fourier 级数 $S_N(f)$ 一致收敛到 f .

Proof. 对任意 $x \in S^1$, 均有

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) - f(x) &= \int_{S^1} D_N(y) f(x-y) \frac{dy}{2\pi} - f(x) \\ (D_N \text{ 为偶函数}) &= \int_0^\pi D_N(y) (f(x-y) + f(x+y) - 2f(x)) \frac{dy}{2\pi}. \end{aligned}$$

由于当 $\delta \leq y \leq \pi$ 时 $\sin \frac{1}{2}y$ 有一致下界, 故 $g(x, y) = (f(x-y) + f(x+y) - 2f(x))/\sin \frac{1}{2}y$ 为连续函数. 我们证明:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in S^1} \left| \int_\delta^\pi \sin(N + \frac{1}{2})y \cdot g(x, y) \frac{dy}{2\pi} \right| = 0. \quad (1)$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 根据 g 在 $[\delta, \pi] \times S^1$ 上的连续性, 可取有限个 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 使得对任意 $x \in S^1$, 存在 x_i 使得 $|g(x, y) - g(x_i, y)| < \varepsilon$. 记 $f_i(y) = g(x_i, y)$.

根据 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_{\delta}^{\pi} \sin(N + \frac{1}{2})y \cdot f_i(y) \frac{dy}{2\pi} \right| = 0.$$

于是存在 N_0 使得对任意 $N > N_0$ 和任意 x_i 均有

$$\left| \int_{\delta}^{\pi} \sin(N + \frac{1}{2})y \cdot f_i(y) \frac{dy}{2\pi} \right| < \varepsilon.$$

所以

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in S^1} \left| \int_{\delta}^{\pi} \sin(N + \frac{1}{2})y \cdot g(x, y) \frac{dy}{2\pi} \right| \\ & \leq \left| \int_{\delta}^{\pi} |g(x, y) - f_i(y)| \frac{dy}{2\pi} \right| + \left| \int_{\delta}^{\pi} \sin(N + \frac{1}{2})y \cdot f_i(y) \frac{dy}{2\pi} \right| \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

这里对每个 x 可以选定不同的 i , 这就证明了 (1). 另一方面, 根据 Hölder 性,

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in S^1} \left| \int_0^{\delta} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin(\frac{1}{2}y)} (f(x-y) + f(x+y) - 2f(x)) \frac{dy}{2\pi} \right| \\ & \leq \int_0^{\delta} \left| \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin(\frac{1}{2}y)} \right| \cdot C y^{\alpha} \frac{dy}{2\pi} \\ & (\sin(\frac{1}{2}y) \geq Dy) \leq \int_0^{\delta} \frac{C}{2\pi D} y^{\alpha-1} dy = \frac{C}{2\pi D\alpha} \delta^{\alpha}. \end{aligned}$$

所以存在一致常数 C' 使得 $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in S^1} |S_N(f)(x) - f(x)| \leq C' \cdot \delta^{\alpha}$. 再根据 α 的任意性可知 $S_N(f)$ 一致收敛到 f . $\square$

Problem 15

回忆数分 I 中一道习题:

- 对序列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$, 定义序列 $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $\sigma_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$. 定义 $b_k = a_{k+1} - a_k$. 如果 $\{kb_k\}_{k \geq 1}$ 一致有界, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$, 那么有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sigma$.

利用这个结论证明如果 f 在 $[0, 2\pi]$ 上可积, 并且 $\widehat{f}(k) = O(\frac{1}{|k|})$, 证明在 f 的 Lebesgue 点 x 处有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = f(x).$$

Proof. 由于 Fejer 核 $F_N(f)$ 是恒同逼近核, 因此在 Lebesgue 点处有逐点收敛:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f)(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N * f(x) = f(x).$$

由于 $\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)(x)$, 因此我们只需证明 $k(S_{k+1}(f)(x) - S_k(f)(x))$ 一致有界就可用上面的结论证明命题.

$$|k(S_{k+1}(f)(x) - S_k(f)(x))| = |k(\widehat{f}(k)e^{-ikx} + \widehat{f}(-k)e^{ikx})| \leq |k\widehat{f}(k)| + |k\widehat{f}(-k)|.$$

根据 $\widehat{f}(k) = O(1/|k|)$ 立即可知上式关于 k 一致有界, 证毕. $\square$

Problem 16

假设 f 是 $[0, 2\pi]$ 上连续的周期函数, 证明级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k}$$

绝对收敛.

Proof. 由于 f 是连续函数, 故 $f \in L^2([0, 2\pi])$. 这意味着

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_{L^2}^2 < +\infty.$$

从而

$$\left(\sum_{k=1}^N \frac{|\widehat{f}(k)|}{k} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^N |\widehat{f}(k)|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \right).$$

由于 RHS 两者均有一致上界, 故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(k)|}{k}$ 收敛, 证毕. 

Problem 17

如果 f, g 是 $[0, 2\pi]$ 上连续的周期函数, 并且对应的 Fourier 级数都绝对收敛. 证明 fg 的 Fourier 级数也绝对收敛, 这表明所有 Fourier 级数绝对收敛的连续周期函数构成代数, 这个代数被称为 **Wierna 代数**.

Proof. 首先证明如果 f 的 Fourier 级数绝对收敛, 那么其 Fourier 级数收敛到 f . 我们可设 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikx} \Rightarrow g$, 那么

$$\widehat{g}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{-N \leq k \leq N} \widehat{f}(k)e^{ikx}, e^{ikx} \right\rangle = \widehat{f}(k).$$

所以 $f = g$, a.e. 根据 $f, g \in C(S^1)$ 可知 $f = g$.

接下来我们考虑 fg 的第 k 个 Fourier 系数:

$$\begin{aligned} \widehat{fg}(k) &= \int_{S^1} f(x)g(x)e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} \\ &= \int_{S^1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m)e^{imx} \right) g(x)e^{ikx} \frac{dx}{2\pi} \\ &= \int_{S^1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m)g(x)e^{-i(k-m)x} \frac{dx}{2\pi} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) \int_{S^1} g(x)e^{-i(k-m)x} \frac{dx}{2\pi} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m)\widehat{g}(k-m). \end{aligned}$$

其中交换求和来源于绝对收敛性. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{fg}(k)| &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) \widehat{g}(k-m) \right| \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(m)| |\widehat{g}(k-m)| \\ &= \sum_{a \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(a)| \sum_{b \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(b)| < +\infty.\end{aligned}$$

所以 fg 的 Fourier 级数绝对收敛.



Problem 18

由 Abel 判别法可知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$$

对任意 $x \in [0, 2\pi]$ 以及 $\alpha > 0$ 都收敛, 记极限函数为 $f(x)$. 如果 $\alpha < 1$, 证明 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上不是 Riemann 可积的.

Proof. 事实上我们将证明

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha} = \infty,$$

从而 f 在 $[0, 2\pi]$ 上不是 Riemann 可积的. 实际上,

$$f(x) = x^{\alpha-1} \cdot x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{(nx)^\alpha}.$$

我们证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{(nx)^\alpha} = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y^\alpha} dy. \quad (*)$$

这是因为左边其实代表了 Riemann 和:

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y^\alpha} dy = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{\sin y}{y^\alpha} dy = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\lfloor N/x \rfloor} \frac{x \sin(nx)}{(nx)^\alpha}.$$

为了证明极限可交换, 我们证明每项距离其极限的差是一致的: 首先

$$\sum_{n=1}^t x \sin(nx) = \operatorname{Im} \sum_{n=1}^t (x e^{inx}) = \operatorname{Im} \frac{x(e^{i(t+1)x} - e^{ix})}{e^{ix} - 1} \leq \frac{2x}{|e^{ix} - 1|} \leq C.$$

所以根据 Abel 求和,

$$\begin{aligned}\sum_{n=\lceil N/x \rceil}^{\infty} \frac{x \sin(nx)}{(nx)^\alpha} &= \sum_{n=\lceil N/x \rceil}^{\infty} \left(\sum_{m=\lceil N/x \rceil}^n x \sin(mx) \right) \left(\frac{1}{(nx)^\alpha} - \frac{1}{((n+1)x)^\alpha} \right) \\ &\leq \sum_{n=\lceil N/x \rceil}^{\infty} C \left(\frac{1}{(nx)^\alpha} - \frac{1}{((n+1)x)^\alpha} \right) \leq \frac{C}{N^\alpha}.\end{aligned}$$

于是 (*) 成立. 另一方面,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin y}{y^\alpha} dy &= \sum_{k=0}^\infty \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin y}{y^\alpha} dy \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^\pi \sin y \left(\frac{1}{(y+2k\pi)^\alpha} - \frac{1}{(y+(2k+1)\pi)^\alpha} \right) dy > 0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin y}{y^\alpha} dy = +\infty.$$

证毕. $\square$

Problem 19

证明

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_N(\theta)| d\theta = \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1).$$

Proof. 首先根据 $D_N(\theta)$ 的偶性, 只需考虑

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right| d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right| d\theta.$$

由于 $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ 在 $[0, \pi]$ 上是连续函数, 具有一致上界, 因此

$$\int_0^\pi \left| \sin(N + \frac{1}{2})\theta \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2}\theta} - \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right) \right| d\theta \leq \int_0^\pi C d\theta = O(1).$$

于是

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin(N + \frac{1}{2})\theta|}{\theta} d\theta + O(1) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin \theta|}{\theta} d\theta + O(1) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{2N} \int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2} \frac{|\sin \theta|}{\theta} d\theta + O(1).\end{aligned}$$

由于对任何 k ,

$$\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2} |\sin \theta| d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 1.$$

因此

$$\int_{k\pi/2}^{(k+1)\pi/2} \frac{|\sin \theta|}{\theta} d\theta \in \left[\frac{2}{(k+1)\pi}, \frac{2}{k\pi} \right].$$

所以

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{2}{k\pi} - C \leq \text{LHS} \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{2N} \frac{2}{k\pi} + C.$$

容易得到

$$\text{LHS} = \frac{4}{\pi^2} \log(2N) + O(1) = \frac{4}{\pi^2} \log N + O(1).$$

证毕.



Problem 20

利用 Dirichlet 核函数证明

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

以此证明

$$\sum_{k=1}^N \frac{\sin kx}{k} = \frac{1}{2} \int_0^x (D_N(t) - 1) dt$$

在 $[0, \pi]$ 上一致有界 (与 N, x 无关) .

Proof. 考虑函数 $f(x) = \frac{\sin \frac{1}{2}x}{x}$, 它是 $\mathbb{R}$ 上的 C^∞ 函数. 根据局部化引理, 选定任意 $\delta \in (0, \pi)$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^\delta D_N(x) f(-x) \frac{dx}{2\pi} = f(0) = \frac{1}{2}.$$

代入 Dirichlet 核的表达式,

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^\delta \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}x}{x} dx \\ &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{x} dx \\ &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{(N + \frac{1}{2})\delta} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

这就得到了积分为 $\pi/2$.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\sin kx}{k} \right)' &= \sum_{k=1}^N \cos kx = \sum_{k=1}^N \frac{\cos kx \sin \frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}x} \sum_{k=1}^N \left(\sin(k + \frac{1}{2})x - \sin(k - \frac{1}{2})x \right) \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}x} (\sin(N + \frac{1}{2})x - \sin \frac{1}{2}x). \end{aligned}$$

两边积分即得

$$\sum_{k=1}^N \frac{\sin kx}{k} = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t - \sin \frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} dt = \frac{1}{2} \int_0^x (D_N(t) - 1) dt.$$

于是

$$\left| \int_0^x (D_N(t) - 1) dt \right| = \left| \int_0^{(N + \frac{1}{2})x} \frac{\sin t}{t} dt - x \right|.$$

根据之前的结论, $g(y) = \int_0^y \sin t/t \, dt$ 在 $[0, \infty)$ 上是连续函数并且极限值有限, 于是它在 $[0, +\infty)$ 上有一致上界 M . 所以该积分有和 x, N 选取无关的一致上界, 证毕. $\square$

4.2 第二次作业

Problem 21

如果 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是线性空间 V 上的内积, 证明

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in V.$$

Proof. 根据正交分解

$$x = x_0 + x_1, \quad x_0 = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y, \quad x_1 = x - x_0$$

可知

$$\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \|x_1\|^2 = \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \|x_1\|^2 \geq \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}.$$

即 $\|x\| \cdot \|y\| \geq |\langle x, y \rangle|$. $\square$

Problem 22

如果 $\|\cdot\|$ 是由内积诱导的范数, 证明平行四边形法则

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Proof. 直接展开即可.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= 2(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

$\square$

Problem 23

在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中, 如果 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\| = 0$, 那么对任意 $g \in \mathcal{H}$ 有

$$\langle g, f \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle g, f_k \rangle.$$

Proof. 这是因为

$$|\langle g, f_k \rangle - \langle g, f \rangle| = |\langle g, f_k - f \rangle| \leq \|g\| \cdot \|f_k - f\|.$$

于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\langle g, f_k \rangle - \langle g, f \rangle) \leq \|g\| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\| = 0.$$



Problem 24

反过来同样在 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中, 如果 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\| = \|f\|$ 并且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, g \rangle = \langle f, g \rangle, \quad \forall g \in \mathcal{H},$$

证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\| = 0$.

Proof. 如果 $f = 0$, 那么 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\| = \|f\|$ 直接推出 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\| = 0$. 下设 $f \neq 0$, 故 $\|f\| \neq 0$. 记

$$f_{k0} = \frac{\langle f_k, f \rangle}{\langle f, f \rangle} f, \quad f_{k1} = f_k - \frac{\langle f_k, f \rangle}{\langle f, f \rangle} f.$$

则 $\langle f_{k1}, f \rangle = 0$, 因此 $\langle f_{k0}, f_{k1} \rangle = 0$, 所以

$$\|f_k\|^2 = \|f_{k0}\|^2 + \|f_{k1}\|^2. \quad (1)$$

根据题目条件,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\langle f_k, f \rangle}{\langle f, f \rangle} = 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{k0} - f\| = 0.$$

所以 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{k0}\|^2 = \|f\|^2$, 于是根据 (1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{k1}\| = 0$. 所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|f_{k0} - f\|^2 + \|f_{k1}\|^2) = 0.$$

证毕.



Problem 25

如果 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 是两个实数域上的无限维 Hilbert 空间, 证明存在一一映射 $F: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ 使得

$$\|F(x)\| = \|x\|, \quad F(ax + by) = aF(x) + bF(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}_1, a, b \in \mathbb{R}.$$

Proof. 我们证明任何实数域上的无限维 Hilbert 空间都到 ℓ^2 空间

$$\ell^2: \{(a_k)_{k \geq 1} : \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty\}, \quad \langle (a_k), (b_k) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

有内积空间之间的同构 $T: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2$, 这样 $T_2^{-1} \circ T_1$ 就给出符合题目要求的映射.

课上我们证明了任何 Hilbert 空间都存在一组标准正交基 $\{e_k\}_{k \geq 1}$, 满足

$$(i) \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k;$$

(ii) 如果 $\langle f, e_k \rangle = 0$ 对任何 k 均成立, 则 $f = 0$.

考虑映射

$$T: \mathcal{H} \rightarrow \ell^2, \quad f \mapsto (\langle f, e_k \rangle)_{k \geq 1}.$$

- f 是线性映射, 这根据每个 $\langle f, e_k \rangle$ 的线性显然.
- f 是单射, 只需证明 $\ker T = \{0\}$. 这是 (ii) 的直接推论.
- f 是满射, 给定任意 $(a_k)_{k \geq 1} \in \ell^2$, 考虑 $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$. 我们证明 $f_n = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ 是一个 Cauchy 列: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得 $\sum_{k \geq N} a_k^2 < \varepsilon$, 所以

$$\|f_n - f_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n a_k^2 \leq \varepsilon, \quad \forall n > m > N.$$

所以 $f \in \mathcal{H}$, 并且 $\langle f, e_k \rangle = a_k$, 即 $T(f) = (a_k)$.

- f 保内积, 这是根据内积的连续性,

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k, g \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle \langle g, e_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle g, e_k \rangle = \langle T(f), T(g) \rangle. \end{aligned}$$

显然根据 Cauchy 不等式该值有限.



Problem 26

证明

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots$$

是 $L^2([-\pi, \pi])$ 的一组标准正交基.

Proof. 先来证明这是一组标准正交系. 我们已经知道 $e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$ 构成一组标准正交基, 题目中所给的是

$$e_0, \frac{e_n + e_{-n}}{\sqrt{2}} (n \in \mathbb{N}^*), \frac{e_n - e_{-n}}{\sqrt{2i}} (n \in \mathbb{N}^*).$$

作如下验证:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{e_n + e_{-n}}{\sqrt{2}}, \frac{e_n + e_{-n}}{\sqrt{2}} \right\rangle &= \frac{1}{2} (\langle e_n, e_n \rangle + \langle e_{-n}, e_{-n} \rangle) = 1; \\ \left\langle \frac{e_n - e_{-n}}{\sqrt{2i}}, \frac{e_n - e_{-n}}{\sqrt{2i}} \right\rangle &= \frac{1}{2} (\langle e_n, e_n \rangle + \langle e_{-n}, e_{-n} \rangle) = 1; \\ \left\langle \frac{e_n + e_{-n}}{\sqrt{2}}, \frac{e_n - e_{-n}}{\sqrt{2i}} \right\rangle &= \frac{1}{-2i} (\langle e_n, e_n \rangle - \langle e_{-n}, e_{-n} \rangle). \end{aligned}$$

再证明它是标准正交基. 如果存在 f 核上面这些函数内积都是 0, 那么

$$\langle f, e_n + e_{-n} \rangle = \langle f, e_n - e_{-n} \rangle = 0 \Rightarrow \langle f, e_n \rangle = \langle f, e_{-n} \rangle = 0.$$

于是 f 和所有 e_n 正交, 在 L^2 空间下有 $f = 0$. 证毕.



4.3 第三次作业

声明: 因为我真的很不喜欢套两层 $\{\{\cdot\}\}$, 所以如果题目中有两层, 表示序列会用 $\langle \cdot \rangle$ 来代替.

Problem 27

试构造数列 $\{\xi_k\}_{k \geq 1} \subset [0, 1)$, 使得它在 $[0, 1)$ 上是稠密但不是等分布的.

Proof. 我们已知数列 $\{\sqrt{2}k\}$ 在 $[0, 1)$ 中是等分布的, 从而也一定是稠密的. 因此我们定义数列

$$a_{3k} = \frac{1}{2}\{\sqrt{2} \cdot 2k\}, a_{3k+1} = \frac{1}{2}\{\sqrt{2} \cdot (2k+1)\}, a_{3k+2} = \frac{1}{2}\{\sqrt{2}k\} + \frac{1}{2}.$$

则 $3k$ 和 $3k+1$ 类型的项在 $[0, \frac{1}{2})$ 中等分布, $3k+2$ 类型的项在 $[\frac{1}{2}, 1)$ 中等分布, 因此它们在整个 $[0, 1)$ 上稠密. 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \leq n : a_k \in [0, \frac{1}{2}]\}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \leq n : k = 3s \text{ or } 3s+1\}}{n} = \frac{2}{3}.$$

因此 $\{a_k\}$ 不是等分布的.



Problem 28

假设 $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ 是 $[0, 1)$ 上的等分布序列, f 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的周期函数, 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积并且满足 $\int_0^1 f(x) dx = 0$. 证明

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n) \right|^2 dx = 0.$$

Proof. 设

$$g_N(f, x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n).$$

首先证明若 f 是连续函数, 则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|g_N(f)\|_{\infty} = 0 \quad (1)$$

首先考虑 $f = e^{2\pi i \ell x}$ 的情形, 此时

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} \|g_N(P)\|_{\infty} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i \ell (x + \xi_n)} \right\|_{\infty} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i \ell \xi_n} \right| \\ &= \left| \int_0^1 e^{2\pi i \ell x} dx \right| = 0.\end{aligned}$$

那么对任意三角多项式均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_N(P)\|_{\infty} = 0$. 对一般的连续周期函数 f , 它可被三角多项式一致逼近, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在三角多项式 P 使得 $\|P - f\|_{\infty} \leq \varepsilon$, 则

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x + \xi_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(x + \xi_n) \right| \leq \frac{1}{N} \cdot N\varepsilon = \varepsilon.$$

因此 $\|g_N(f) - g_N(P)\|_{\infty} \leq \varepsilon$. 根据 P 满足 (1) 可知存在 N 使得对任意 $n \geq N$ 均有 $\|g_n(P)\|_{\infty} < \varepsilon$, 从而

$$\|g_n(f)\|_{\infty} \leq \|g_n(P)\|_{\infty} + \|g_n(f) - g_n(P)\|_{\infty} \leq 2\varepsilon.$$

因此任何连续函数都满足 (1). 自然对任意连续函数都有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 |g_N(x)|^2 dx \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|g_N(x)\|_{\infty}^2 = 0.$$

而 L^2 可积函数可被连续函数在 L^2 范数下逼近, 取 $h \in C^0$ 使得 $\|f - h\|_{L^2} \leq \varepsilon$, 则

$$\|g_N(f) - g_N(h)\|_{L^2} \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|f(\cdot + \xi_n) - h(\cdot + \xi_n)\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|g_N(f)\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得结论.



Problem 29

假设 $\sigma > 0$ 但不是整数, a 是非零实数, 证明序列 $\langle \{an^{\sigma}\} \rangle_{n \geq 1}$ 在 $[0, 1)$ 上等分布.

Proof.

Lemma. 若定义在 $[1, +\infty)$ 上的光滑函数 f 满足 $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, 则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|f(N)|}{N} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N|f'(N)|} = 0.$$

则 $\langle \{f(N)\} \rangle_{N \geq 1}$ 是等分布序列.

Proof. 我们考虑

$$S_N = \sum_{n=1}^N e^{2\pi i \ell f(n)},$$

并记 $b = 2\pi\ell$. 一方面,

$$\begin{aligned} \left| S_N - \int_1^{N+1} e^{ibf(x)} dx \right| &= \left| \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} e^{ibf(n)} - e^{ibf(x)} dx \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} |e^{ibf(x)} - e^{ibf(n)}| dx \\ &\leq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} |b| (f(x) - f(n)) dx \\ &\leq \sum_{n=1}^N |b| (f(n+1) - f(n)) = |b| (f(N+1) - f(1)). \end{aligned}$$

其中用到 f 单调增, 因此可去掉绝对值. 另一方面,

$$\begin{aligned} \left| \int_1^{N+1} e^{ibf(x)} dx \right| &\leq \left| \int_1^{N+1} \frac{1}{ibf'(x)} (e^{ibf(x)})' dx \right| \\ &\leq \left| \frac{e^{ibf(x)}}{ibf'(x)} \Big|_1^{N+1} \right| + \int_1^{N+1} \left| \left(\frac{1}{ibf'(x)} \right)' \right| dx \\ &\leq O\left(\frac{1}{|f'(N+1)|}\right) + \frac{1}{|b|} \int_1^{N+1} \left(\frac{1}{f'(x)} \right)' dx \\ &= O\left(\frac{1}{|f'(N+1)|}\right). \end{aligned}$$

其中用到 $f'(x)$ 单调减, 因此可去掉绝对值. 所以

$$|S_N| = O(|f(N+1)|) + O\left(\frac{1}{f'(N+1)}\right).$$

因此 $\lim_{N \rightarrow \infty} |S_N|/N = 0$, 故 $\{f(N)\}_{N \geq 1}$ 是等分布序列.



回到原题, 对任意函数 f , 记

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

根据第 6 题结论, $\{f(n)\}_{n \geq 1}$ 等分布的一个充分条件是 $\{\Delta_h f(n)\}_{n \geq 1}$ 对 $h \in \mathbb{N}^*$ 均等分布. 根据归纳可得 $\{f(n)\}$ 等分布的一个充分条件是对某个正整数 t 和任意 $h_1, h_2, \dots, h_t \in \mathbb{N}^*$ 均有

$$\langle \{\Delta_{h_t} \Delta_{h_{t-1}} \dots \Delta_{h_1} f(n)\} \rangle_{n \geq 1}$$

是等分布序列. 现在考虑 $f(x) = ax^\sigma$, 不妨设 $a > 0$. 则

$$f^{(n)}(x) = a\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)x^{\sigma-n}.$$

因此 f 在 $[1, +\infty)$ 上是 C^∞ 的, 并且存在正整数 $n_0 = \lfloor \sigma \rfloor$ 使得对任意 $x \in [1, \infty)$ 均有

$$f^{(1)}(x) > 0, f^{(2)}(x) > 0, \dots, f^{(n_0)}(x) > 0, f^{(n_0+1)}(x) < 0.$$

因此对任意 $h > 0$, $\Delta_{h_1} f$ 满足

$$(\Delta_h f)^{(1)}(x) > 0, \dots, (\Delta_h f)^{(n_0-1)}(x) > 0, (\Delta_h f)^{(n_0)}(x) < 0.$$

因此

$$(\Delta_{h(n_0-1)} \Delta_{h(n_0-2)} \dots \Delta_{h_1} f)' > 0, (\Delta_{h(n_0-1)} \Delta_{h(n_0-2)} \dots \Delta_{h_1} f)'' < 0.$$

根据差分的性质, 我们可以用幂级数展开得到

$$(x+h)^\sigma = x^\sigma + \sigma x^{\sigma-1} h + \binom{\sigma}{2} x^{\sigma-2} h^2 + \dots$$

于是 $\Delta_h f(x) = a_1 x^{\sigma-1} + a_2 x^{\sigma-2} + \dots$, 可以归纳证明每次差分会消去一项, 故

$$(\Delta_{h_t} \Delta_{h_{t-1}} \dots \Delta_{h_1} f)(N) = O(N^{\sigma-t}).$$

代入 $t = n_0$ 可知

$$\begin{aligned} (\Delta_{h(n_0-1)} \Delta_{h(n_0-2)} \dots \Delta_{h_1} f)(N) &= O(N^{\sigma-\lfloor n_0 \rfloor}). \\ (\Delta_{h(n_0-1)} \Delta_{h(n_0-2)} \dots \Delta_{h_1} f)'(N) &= O(N^{\sigma-\lfloor n_0 \rfloor-1}). \end{aligned}$$

所以上述函数总是满足引理的, 因此等分布性质成立. 故原函数 f 也满足等分布性质, 证毕. 

Problem 30

假设 f 是定义在整数集上的函数, 定义

$$S_N = \sum_{n=1}^N e^{2\pi i f(n)}.$$

对任意 $H \leq N$, 证明存在常数 C , 不依赖于 N, H 和 f , 使得

$$|S_N|^2 \leq C \frac{N}{H} \sum_{h=0}^H \left| \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i (f(n+h) - f(n))} \right|.$$

Proof. 固定 N , 对 $n \in \mathbb{Z}$ 设

$$v_n = \begin{cases} e^{2\pi i f(n)}, & n \in [1, N]; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

对 $n = 0, \dots, H$, 设

$$a_n = (v_{1-n}, v_{2-n}, \dots, v_{N+H-n}).$$

考虑 $\mathbb{C}^{N+H}$ 中的内积, 有

$$\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i (f(n+h) - f(n))} = \sum_{n=1}^{N-h} v_{n+h} \overline{v_n} = \langle a_h, a_0 \rangle.$$

一方面,

$$\|a_0 + \cdots + a_H\|^2 \geq \frac{1}{N+H} \left| \sum_{n=0}^H (v_{1-n} + \cdots + v_{N+H-n}) \right|^2 = \frac{H^2}{N+H} |v_1 + \cdots + v_N|^2.$$

另一方面, 由于 $\langle a_i, a_j \rangle = \langle a_{i+k}, a_{j+k} \rangle$, 则

$$\begin{aligned} \|a_0 + \cdots + a_H\|^2 &\leq (H+1) |\langle a_0, a_0 \rangle| + 2H |\langle a_0, a_1 \rangle| + \cdots + 2 |\langle a_0, a_H \rangle| \\ &\leq 2H \sum_{h=0}^H |\langle a_0, a_h \rangle|. \end{aligned}$$

所以

$$\frac{4N}{H} \sum_{h=0}^H |\langle a_0, a_h \rangle| \geq \frac{2(N+H)}{H} \sum_{h=0}^H |\langle a_0, a_h \rangle| \geq |v_1 + \cdots + v_N|^2.$$

因此令 $C = 4$ 即可. 

Problem 31

如果 γ 是无理数, 证明 $[0, 1)$ 上的序列 $\langle \{n^2\gamma\} \rangle_{n \geq 1}$ 是等分布的.

Proof. 对任意正整数 h , $(n+h)^2\gamma = n^2\gamma + (2nh + h^2)\gamma$. 根据 $\gamma \notin \mathbb{Q}$ 以及 $h \in \mathbb{N}^*$ 可知 $\langle \{2nh\gamma\} \rangle_{n \geq 1}$ 是等分布序列, 因此 $\langle \{(2nh + h^2)\gamma\} \rangle_{n \geq 1}$ 是等分布序列. 根据第 6 题结论, $\langle \{n^2\gamma\} \rangle_{n \geq 1}$ 是等分布的, 证毕. 

Problem 32

如果序列 $\{\xi_n\}$ 满足对任意正整数 h , $[0, 1)$ 上的序列 $\langle \{\xi_{n+h} - \xi_n\} \rangle_{n \geq 1}$ 都是等分布的. 证明 $\langle \{\xi_n\} \rangle_{n \geq 1}$ 在 $[0, 1)$ 上也是等分布的.

Proof. 在第 4 题结论中令 $f(n) = \ell\xi_n$, 则

$$|S_N|^2 \leq C \frac{N}{H} \sum_{h=0}^H \left| \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i \ell(\xi_{n+h} - \xi_n)} \right|.$$

固定 $H > 0$, 则根据 $\langle \{\xi_{n+h} - \xi_n\} \rangle_{n \geq 1}$ 的等分布性, 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 N_0 使得对任意 $N > N_0$ 及 $1 \leq h \leq H$ 均有

$$\left| \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i \ell(\xi_{n+h} - \xi_n)} \right| \leq \varepsilon \cdot (N-h) \leq \varepsilon N.$$

于是

$$|S_N|^2 \leq C \frac{N}{H} (N + \sum_{h=1}^H N\varepsilon) = C \left(\frac{1}{H} + \varepsilon \right) N^2.$$

所以

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |S_N| \leq \sqrt{C \left(\frac{1}{H} + \varepsilon \right)}.$$

先令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 可知极限至多为 CH^{-1} , 再令 $H \rightarrow \infty$ 可得极限为 0, 从而 $\langle \{\xi_n\} \rangle_{n \geq 1}$ 是等分布的, 证毕. 

Problem 33

考虑 $n(\geq 1)$ 次实多项式

$$P(x) = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0.$$

如果 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 中至少有一个无理数, 证明序列 $\langle \{P(m)\} \rangle_{m \geq 1}$ 在 $[0, 1)$ 上等分布.

Proof. 我们对 n 的次数归纳. 当 $n = 1$ 时, $c_1 \notin \mathbb{Q}$, 此时 $\langle \{c_1 m\} \rangle_{m \geq 1}$ 是等分布序列, 因此 $\langle \{c_1 m + c_0\} \rangle_{m \geq 1}$ 是等分布序列. 假设 $n - 1$ 时成立, 考虑 n 时情形. 对 n 次多项式 P , 如果 $c_n \in \mathbb{Q}$, 则 $\{c_n m^n\}_{m \geq 1}$ 为周期序列, 设其周期为 T . $c_1, \dots, c_{n-1}$ 中有一个是无理数, 考虑多项式

$$Q_k(x) = P(Tx + k) - c_n(Tx + k)^n = c_{n-1}(Tx + k)^{n-1} + \cdots + c_1(Tx + k) + c_0.$$

由于 T, k 都是整数, 因此设 i_0 是使得 $c_{i_0} \notin \mathbb{Q}$ 的最大下标, 则 $Q_k(x)$ 中 x^{i_0} 项系数为无理数, 因此可使用归纳假设得到 $\langle \{Q_k(m)\} \rangle_{m \geq 1}$ 是等分布的. 此时 $P(Tm + k) = Q_k(m) + c_n k^n$, 后者为常值, 因此 $\langle \{P(Tm + k)\} \rangle_{m \geq 1}$ 对每个 k 均是等分布的. 从而对任何区间 $[a, b] \subset [0, 1]$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{m : m \leq N, \{P(m)\} \in [a, b]\}}{N} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=0}^{T-1} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-a}.$$

因此 $\langle \{P(m)\} \rangle_{m \geq 1}$ 是周期序列. 另一方面, 如果 $c_n \notin \mathbb{Q}$, 那么

$$P(x+h) - P(x) = \sum_{i=0}^n c_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} h^{i-j} x^j = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n c_i \binom{i}{j} h^{i-j} x^j.$$

因此 $P(x+h) - P(x)$ 是 $n-1$ 次多项式, 并且 x^{n-1} 系数为无理数. 利用归纳假设, 对任意 h , $\langle \{P(m+h) - P(m)\} \rangle_{m \geq 1}$ 都是等分布的, 因此根据第 6 题结论 $\langle \{P(m)\} \rangle_{m \geq 1}$ 是等分布的, 证毕.

