

流形与拓扑， Pt.I

FE enthusiast enthusiast

2026.01.04

目录

0 序言	3
1 流形的微分结构	5
1.1 流形的定义与基本性态	5
1.1.1 拓扑流形与光滑流形	5
1.1.2 复流形和 Riemann 面	10
1.1.3 仿射簇	14
1.2 切空间与微分映射	17
1.2.1 切空间的多种定义	17
1.2.2 切丛与可定向性	23
1.2.3 复切空间和代数簇上的切空间	28
1.3 局部性态与整体性态	35
1.3.1 反函数定理与局部性质	35
1.3.2 浸入与淹没	41
1.3.3 正则值的原像集：映射度理论	47
1.4 Sard 定理：证明与应用	57
1.4.1 Sard 定理的证明	57
1.4.2 Whitney 嵌入定理	63
1.4.3 Morse 理论	69
1.4.4 带边流形与 Brouwer 不动点定理	78

0 序言

本笔记是 **杨磊** 老师的《微分流形与拓扑》课程笔记. 杨磊老师在课上十分强调数学中各领域之间的融合关系, 这便是本笔记将要体现的核心思想: 我们将以微分流形及微分拓扑作为主线, 然后从已有的知识出发添加一些关于复流形和代数几何的内容, 有时也会有一些代数拓扑的内容作为补充. 下面我们简要介绍各章的主要话题.

第一节我们介绍了拓扑流形与光滑流形, 复流形与 Riemann 面, 仿射簇这些概念的定义与一些基本例子, 并且探讨了它们的一些基本性质. 从定义出发, 我们能看见流形定义的精炼性强, 适用性广, 并且确实能覆盖到我们在实际应用中想要研究的诸多几何对象. 而具体到它们的性质, 我们又能直观地感受到“刚性”不同所导致的截然不同的现象.

第二节我们主要介绍与切空间相关的一些内容. 切空间的概念来源于局部上的线性逼近, 而这涉及到微分运算, 从而可在光滑及更佳的范畴中定义. 首先我们会介绍切空间的各种定义, 需要指出它们不存在概念上的优劣性, 它们都很好用, 只是用以建构不同的直观以及可推广性有所不同. 然后我们来研究可定向性并顺带引入丛的语言, 这也是一个有多重定义的概念, 并且初步建构了局部——整体概念之间的联系. 最后切空间的概念也是研究复流形和代数簇的基础, 其定义方式类似但形态和光滑流形有所不同: 比如复切空间上会存在一个直和分解, 代数簇切空间维数会和光滑点, 奇异点的判定相关, 我们对此进行简要介绍.

第三节研究流形及流形之间映射给出的局部性态和整体性态. 局部性态来源于反函数定理的思想: 在一点处的微分能有效刻画局部性质, 推广到流形上就得到常秩定理. 与之对比, 我们也对 Riemann 面上的局部性态加以讨论, 并发现诸如开映射的拓扑性质起到关键作用. 然后我们重点研究浸入和淹没这两种性质足够好的映射, 并考虑何时它们会导向整体性质, 即使像集或原像集成为光滑子流形. 我们会发现以隐函数定理为思想, 原像集/水平集所具有的性质一般来说更好, 并由此给出重要的正则值/临界值概念. 这一部分的最后仍然给出了在复流形和代数几何中它的类似命题. 最后一部分我们从正则值的原像出发建构映射度理论, 具体介绍了 Riemann 面上的映射度和微分拓扑上的映射度概念, 强调了“常态映射”这一拓扑性质在定义中的地位, 并简要提及代数拓扑和代数几何中的映射度. 这一概念会将各种不同的研究进路汇合在一起, 堪称整篇笔记的顶峰.

第四节研究 Sard 定理及其应用. 首先我们给出 Sard 定理的描述和证明, 并给出在代数几何中一些思想类似的“Sard 型”定理. 然后给出三个应用: 首先是 Whitney 嵌入定理, 我们给出一般非紧版本的证明, 并且用它证明了 \mathbb{R}^4 中的纽结平凡性. 然后是 Morse 理论, 它可看作对临界点性质的进一步考察. 我们用 Sard 定理说明了 Morse 函数的存在性, 并解释了 Morse 函数如何刻画流形的拓扑性质. 最后关于带边流形和 Brouwer 不动点定理的部分则作为用微分观点解决代数拓扑问题的

一个具体实例.

笔记的目录中所有内容都属于一个标题下, 这是因为这本质上只是该笔记的第一个部分. 我们没有涉及到微分拓扑中一个重点——流形或者复流形上微积分的内容以及其给出的 de Rham 理论, 而只是在讲义中某些位置作为注记以提供另一种视角. 由于这些内容不是课程的重点, 所以迫于时间原因我们只好暂且将其移除, 未来可能有机会将其完全写成. 此外, 关于代数几何的绝大多数内容, 讲义中只能做到形似的“介绍”而未能完全严格地给出证明, 甚至可能会存在不少错误之处, 在此致歉.

1 流形的微分结构

1.1 流形的定义与基本性态

1.1.1 拓扑流形与光滑流形

流形的概念首次出现于 B.Riemann 于 1854 年 7 月 10 日在哥廷根大学所做的题为“论作为几何学基础的假设”的就职演说里, 在其中他将 n 维流形直观地描述为 $n-1$ 维流形的连续堆叠. 流形的概念是历史上一次重大的思想飞跃, 这同时也是基于物理学的需要: 虽然人们已经发展了欧氏空间 \mathbb{R}^n 上的微积分, 但是在实际现象的描述中, 还有球面 S^n , 环面 T^n , 黎曼曲面等等, 我们需要找到一种语言去直接描述这些模型上的分析. 粗略来说, 我们有以下两种进路:

- 作为“抽象的拓扑空间”, 流形是那些足够好的**局部欧氏**的对象.
- 作为“欧氏空间的子空间”, 流形是一个好的**分层**中的一个切片.

我们将从第一种看法开始, 并在第一部分的中段来证明第二种看法也得到流形. 在给出定义之前, 我们将陈述关于流形研究的两条基本原则:

- 从**局部**思考问题, 然后过渡到整体上;
- 所有性质应当是关于空间本身结构**内蕴**的.

Definition 1.1.1 (拓扑流形). M 是一个**拓扑流形**, 若它满足:

- M 是第二可数的 Hausdorff 空间; (该条定义在历史上是为了让流形具有我们想要的良好性质而总结下来的, 为了剔除掉一些病态的局部欧氏空间. 我们一时半会还看不到它的具体作用.)
- 存在一族**坐标卡集** (atlas) $\{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}$ 使得 $\{U_\alpha\}$ 构成 M 的一个**覆盖**, $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是到欧氏空间中一个开集 V_α 的同胚.

其中性质 (ii) 被称为**局部欧氏性**, n 被称为 M 的**维数**.

拓扑流形的定义使得我们按照下述进路证明某个空间是流形: 我们寻找 M 的一个覆盖, 然后证明覆盖里面每个集合都和欧氏空间中一个开集同胚. 不过我们也可以更加遵循**从局部上思考问题的原则**: 我们为每个点 $x \in M$ 寻找 x 的一个开邻域 U_x 和欧氏空间中的一个开集同胚, 这样所有 U_x 显然给出 M 的一个开覆盖.

关于拓扑流形的坐标卡, 还有几点需要说明: 每点附近的坐标卡都远不是唯一的, 比如如果 (U, ϕ) 是一个坐标卡, 那么对任意 $V \subset U$ 都有 $(V, \phi|_V)$ 是坐标卡. 这样我们可以适当缩小 U 并调整 ϕ , 使得 ϕ 是一个从 U 到 \mathbb{R}^n 中一个标准开球的同胚, 又或者让 ϕ 是从 U 到 \mathbb{R}^n 的同胚. 用这两种方式所定义的流形和上面的定义所得结果相同.

一个比较大的问题是**拓扑流形的维数**，该问题被称为维数不变性. 我们声称 n 被定义为 M 的维数，但我们并没有证明这样的 n 是唯一的. 也就是说，我们需要证明每个点 x 附近的邻域不可能同时与 \mathbb{R}^n 和 \mathbb{R}^m 中的开集同胚，也就是证明 \mathbb{R}^n 中一个开集和 \mathbb{R}^m 中一个开集不同胚. 它的证明并不容易. 其中最自然的一种方法是在拓扑空间范畴 **Top** 中建立**同调理论**，它是满足一些公理的某种拓扑不变量. 如果 $\phi: M \rightarrow N$ 是不同维数流形之间的同胚映射，那么有下述同构成立

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\cong H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - x) \cong H_m(M, M - x) \cong H_m(N, N - \phi(x)) \\ &\cong H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \phi(x)) \cong 0.\end{aligned}$$

这自然给出了维数不变性. 证明它先后利用了同调的同伦不变性，长正合列，切除公理等等性质，足见其不平凡之处. 然而，我们马上就会见到该命题在光滑范畴下立马变成线性代数的直接推论.

为了在流形上利用数学分析中的强大工具，我们需要在拓扑流形上引入光滑结构，或者说微分结构. 这件事情是直观的：因为拓扑流形是局部欧氏的，我们就可以把欧氏空间上的光滑结构，以及其连带着的欧氏空间上的微积分都搬到每个坐标卡上. 但是如果我们只是在每个局部的坐标卡上考虑问题，这就和流形的整体无关了，也就是说我们必须讨论各个坐标卡之间光滑结构的**相容性**. 然而，就算是对最简单的拓扑流形，我们都不能保证它在所有坐标卡上都具有自然的相容性.

Example 1.1.2. 考虑拓扑空间 \mathbb{R} ，它显然是一个拓扑流形. 我们可给出两个从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的同胚

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^3.$$

现在我们想讨论定义在“光滑流形” \mathbb{R} 上的光滑函数. 通过坐标卡，我们用

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

的光滑性来定义 f 在 \mathbb{R} 作为“光滑流形”时的光滑性. 对 φ_1 来说这个定义和通常所说的光滑函数是等同的，但是对 φ_2 来说，这等价于我们要求 $f(x^{1/3})$ 是光滑函数，这两者显然不等价！

上面的例子告诉我们，**光滑结构不是拓扑空间本身内蕴的**. 也就是说，在给定一个拓扑空间的基础上，我们需要选取一些“相容的坐标卡”并为它们赋予欧氏空间拉回所给出的光滑结构，不同的选取可能给出不同的光滑结构. 在刚刚的例子中，如果我们想要 φ_1 和 φ_2 “相容”，需要 $f \circ \varphi_1^{-1}$ 光滑等价于 $f \circ \varphi_2^{-1}$ 光滑. 通过考虑坐标映射，这等价于 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ 光滑. 这是一个只关于两个坐标卡的限制，它可以很容易的被推广到一般的情形上.

Definition 1.1.3 (相容性). 在拓扑流形 M 上，称 (φ_1, U_1) 和 (φ_2, U_2) 是**相容的坐标卡**，如果 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ，或者

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)}$$

是欧氏空间开集之间的光滑映射.

Definition 1.1.4 (光滑流形). 称拓扑流形 M 上的一族坐标卡集 $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是一个光滑图册, 如果它们给出 M 的一个覆盖, 并且它们是两两相容的. 如果两个光滑图册中的所有坐标卡集都是两两相容的, 那么称它们是等价的. M 上的一个光滑结构指的是光滑图册的等价类, 赋予了光滑结构的拓扑流形被称为光滑流形, 记为 $(M, [\mathcal{A}])$. 大部分时候我们会省略 $[\mathcal{A}]$ 这个分量, 这是因为实际建构中很多流形总是有一个“标准”的光滑结构.

Remark. 当我们选定一个光滑结构时, 我们可以考虑所有和该光滑图册相容的坐标卡, 比如每个坐标卡的子坐标卡都是和整个光滑图册相容的. 如果两个坐标卡同时和整个光滑图册相容, 那么它们之间也是相容的 (这是因为光滑性是局部性质, 并且光滑图册给出开覆盖). 所以我们可以良定义和该光滑图册相容的极大图册 (它远小于比如, 拓扑上的极大图册). 当我们说考虑光滑流形的一个坐标卡时, 可以自动认为是从极大图册中寻找. 这样我们就可以说在某点附近选取一个坐标卡 and 标准开球或者整个欧氏空间同胚, 在叙述上带来方便.

在证明一个具体的例子是光滑流形时, 我们应当意识到问题的重点在于“坐标卡的相容性”, 而不是“流形本身有多光滑”. 比如, 如果 M 和 \mathbb{R}^n 在拓扑意义下同胚, 它可以被实现为仅含一个坐标卡的光滑图册, 使 M 成为一个光滑流形. 这一点可能会产生一些直觉上的偏差, 比如下面的例子:

Example 1.1.5. 对任意连续函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 我们可以在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 中考虑光滑映射的图像:

$$V = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

将 V 赋予 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 的子空间拓扑, 则投影映射 $p: V \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, f(x)) \mapsto x$ 是连续双射, 我们也可以证明 p^{-1} 是连续映射. 这告诉我们 V 根据 p 诱导的坐标卡成为一个光滑流形, 但很明显比如说单变元连续函数在 \mathbb{R}^2 上的图像可以有直觉上的“不光滑点”. (如选取 $f(x) = |x|$) 其原因是: V 虽然含有 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 的子空间拓扑, 但其光滑结构可能和 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 上的光滑结构相差甚远. 换句话说, V 不一定是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 的“光滑子流形”.

我们再来看一些更直观的例子.

Example 1.1.6 (S^1 是光滑流形). 首先由于 S^1 被赋予欧氏空间的子拓扑, 因此总是第二可数的 Hausdorff 空间. 然后把 S^1 参数化为 $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. 构造两个坐标卡 (M, f) 和 (N, g) , 分别是

$$\begin{aligned} f^{-1} : (0, 2\pi) &\rightarrow S^1, \quad \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta) \\ g^{-1} : (-\pi, \pi) &\rightarrow S^1, \quad \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta). \end{aligned}$$

很明显

$f^{-1}(0, 2\pi)$ 在 S^1 中的像为 $S^1 - \{(1, 0)\}$, 而 $g^{-1}(-\pi, \pi)$ 在 S^1 中的像为 $S^1 - \{(-1, 0)\}$, 从而

$$M = S^1 - \{(1, 0)\}, \quad N = S^1 - \{(-1, 0)\}.$$

显然 f, g 均是拓扑同胚, 而 $g \circ f^{-1}$ 是 $(0, 2\pi) \rightarrow (-\pi, \pi)$ 的 C^∞ 映射, 所以 (M, f) 和 (N, g) 是相容坐标卡, 这给出了 S^1 的一个光滑结构.

Example 1.1.7 ($\mathbb{R}P^n$ 是光滑流形). 我们知道

$$\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \{x \sim \lambda x, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\} \cong S^n / \{x \sim -x\}.$$

于是可以将 $\mathbb{R}P^n$ 赋予 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 的商空间拓扑, 将其中元素用 $[x_0 : \cdots : x_n]$ 来表示. 现在我们可以考虑以下 $n+1$ 个坐标卡:

$$\begin{aligned} (\varphi_i, U_i) : U_i &= \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{R}P^n, x_i \neq 0\}; \\ \varphi_i : U_i &\rightarrow \mathbb{R}^n, [x_0 : \cdots : x_n] = \left[\frac{x_0}{x_i} : \cdots : 1 : \cdots : \frac{x_n}{x_i}\right] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right). \end{aligned}$$

其中最后一个坐标中删去了第 i 位的 1. 可以验证这是一个同胚, 并且

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j), \left(\frac{x_k}{x_i}\right)_{k \neq i} \mapsto \left(\frac{x_k}{x_j}\right)_{k \neq j}.$$

由于所有分量缩放一个系数代表相同的映射, 因此我们令 $x_i = 1$, 立即得到上述表达式给出从 $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-1}$ (代表去掉 $x_j = 0$ 的那个超平面) 到 $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-1}$ 的光滑映射. 因此 $\mathbb{R}P^n$ 可被赋予一个光滑结构, 它是一个光滑流形.

有时我们可以采用**参数化**的观点, 这时建构流形的方式类似于“在每个局部上赋予一个坐标系”. 最简单的例子是曲线, 对一个一维实流形我们很少说在它的每个局部如何选取一个坐标卡, 而是直接考虑一个从 $[0, 1]$ 到某个空间的映射作为其参数化. 读者可以借助下面的例子对比它和上文中寻找图卡的区别.

Example 1.1.8 (S^2 是光滑流形). 我们把 S^2 分为上下左右前后六个半球, 这六个半球给出了 S^2 的一个覆盖. 考虑六个圆盘分别从这六个方向向球面投影, 比如从上侧投影的映射就形如

$$p : D^2 \rightarrow S^2, (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

显然 p 给出从 D^2 到上半球面的同胚, 我们可以容易验证它们给出一族相容坐标卡, 因此 S^2 是一个光滑流形.

在拓扑流形之间我们就讨论连续映射, 或者说拓扑流形范畴中的态射就是连续映射. (它是拓扑空间范畴的子范畴) 但在光滑流形范畴中事情不完全一样了: 我们要考虑“保光滑结构”的那些映射, 它的定义并不困难, 利用图卡就可以回到欧氏空间上光滑性的讨论.

Definition 1.1.9 (光滑映射). 给定光滑流形 M, N , 称一个拓扑上的连续映射 $f : M \rightarrow N$ 是**光滑映射**, 如果对任意 M 上的坐标卡 (U, φ) 和 N 上的坐标卡 (V, ψ) , 都有

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \rightarrow \psi(f(V) \cap U)$$

作为欧氏空间中开集之间的映射是光滑的. 全体光滑映射构成的集合记为 $C^\infty(M, N)$.

该定义中是对于光滑流形定义中自带的光滑图册而言的, 如果我们采用之前关于极大图册 (与选取的光滑图册相容的全体图卡) 的注记, 那么我们可以在每点 $x \in M$ 和 $f(x) \in N$ 附近选取两个极大图册中的坐标卡 V 和 U 使得 $f(V) \subset U$. 如果对所有这样的坐标卡有上述光滑性成立, 那么 f 就是光滑映射. 这两种定义是相互等价的.

我们可以验证 id_M 是光滑映射, 并且如果 $f : M \rightarrow N$ 和 $g : N \rightarrow P$ 都是光滑映射, 那么 $g \circ f$ 也是光滑映射, 从而 $\{\text{光滑流形}, \text{光滑映射}\}$ 构成一个范畴, 就称为**光滑流形范畴**, 简称**光滑范畴**, 这是这门课上的重点关心对象之一. 进而, 我们可以定义微分同胚:

Definition 1.1.10 (微分 (光滑) 同胚). 设 M, N 是光滑流形, 如果映射 $f : M \rightarrow N$ 是**光滑双射**, 并且其逆 $f^{-1} : N \rightarrow M$ 也是光滑映射, 那么就称 f 是一个**微分同胚**, 也称 M, N 是微分同胚的.

在行文中, 我们会以 $M \cong N$ 来表示在当前讨论的范畴中同构的对象, 这里就是微分同胚的对象. 在这门课上我们想要的关于光滑流形的性质都应当在光滑同胚下被保持, 即如果 $M \cong N$, 那么 M 所具有的所有“性质” N 也满足.

我们来看几个例子:

Example 1.1.11. • 考虑 $N = \mathbb{R}^k$. 当 $k = 1$ 时, 为 \mathbb{R} 赋予标准的光滑结构, 则光滑映射 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 就是我们之前例子中所谈论的光滑函数. 记全体 M 上的光滑函数构成的集合为 $C^\infty(M)$, 它被实现为一个 \mathbb{R} -代数. 对开集 $U \subset M$, U 也能被看作光滑流形, 定义在 U 上的全体光滑函数被记为 $C^\infty(U)$. 对一般的 k , $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ 光滑当且仅当每个分量都是光滑函数.

- 对任意坐标图卡 $\phi : U \xrightarrow{\sim} V \subset \mathbb{R}^n$, U 通过这一图卡被赋予光滑结构, V 作为 \mathbb{R}^n 的开子集也是光滑流形. ϕ 就给出了这两个流形之间的光滑同胚.
- 回顾例 1.1.2, $(\mathbb{R}, \varphi_1 : x \mapsto x)$ 和 $(\mathbb{R}, \varphi_2 : x \mapsto x^3)$ 都为 \mathbb{R} 赋予了一个光滑结构, 并且这两个坐标卡是不相容的. 然而

$$f : (\mathbb{R}, \varphi_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \varphi_2), x \mapsto x^{1/3}$$

给出了这两个流形之间的光滑同胚. 这说明同一个拓扑空间上不相容的光滑结构也可能是微分同胚的.

- 刚刚的例子实际上也给出了一个非光滑同胚的光滑双射例子：只需考虑 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ 即可.

Example 1.1.12 (Milnor 七维怪球). 一个有趣的问题是，给定一个我们熟悉的拓扑空间，比如说 \mathbb{R}^n, S^n ，除了直观上标准的光滑结构外，在差一个微分同胚的意义下还有没有别的光滑结构？（上面已经举出了一个 \mathbb{R} 上不同的光滑结构，但是它和标准结构是微分同胚的）

历史上第一个这样的例子是 Milnor 七维怪球. 它指的是与一个与 S^7 同胚的拓扑空间，但是和标准结构的 S^7 并不光滑同胚. 构造它的方法和代数几何中所谓“奇点”有关，我们会发现在奇点附近有相当有趣的几何来给出这样的例子.（但该笔记还不足以给出“七维怪球”这个例子，下学期《同调论与示性类》课程中会完整呈现它）

另一个有趣的维数是 4 维. 当 $n \neq 4$ 时， \mathbb{R}^n 仅有有限种互不微分同胚的光滑结构. 但是 \mathbb{R}^4 有不可数无穷种这样的结构. 而对于 S^4 来说，人们至今不知道 S^4 上的光滑结构是否唯一.

最后，我们来看在光滑范畴下如何解决之前令人头疼的维数不变性问题.


Theorem 1.1.13 (光滑范畴维数不变性). 若存在 $U \subset \mathbb{R}^n$ 和 $V \subset \mathbb{R}^m$ 之间的同胚，则 $n = m$.

Proof. 设该同胚为 $\Phi : U \rightarrow V$. 任取一点 $p \in U$ ，则 Φ 在 p 处诱导出微分映射

$$d\Phi|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

另一方面，我们也能类似定义 $d\Phi^{-1}|_{\Phi(p)}$. 根据微分的链式法则可知：作为线性映射

$$d\Phi|_p \circ d\Phi^{-1}|_{\Phi(p)} = \text{id}_{\mathbb{R}^m}, \quad d\Phi^{-1}|_{\Phi(p)} \circ d\Phi|_p = \text{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

根据线性代数的理论，如果两个线性空间之间存在同构，则它们的维数必然相等，所以 $n = m$ ，证毕. 

另一个在光滑范畴中容易体现的拓扑性质是**可定向性**. 我们在 1.2.2 节中对此有详细讨论.

1.1.2 复流形和 Riemann 面

上面关于光滑流形定义的好处是，其精神可以完全被照搬到其它的流形上面，比如复流形和代数簇. 比如对复流形来说，我们主要关心的对象是“ \mathbb{C}^n 上的解析（全纯）映射”，因此我们先对 \mathbb{C}^n 上开集之间的解析映射下一个定义，然后使用和上面相同的精神模仿光滑流形来定义复流形.

Definition 1.1.14 (解析函数). 称一个从 \mathbb{C}^n 中开集 Ω 到 \mathbb{C} 的函数是**解析的**，如果它在每点 a 的邻域内都能被展开为绝对收敛的幂级数

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} \cdot (z - a)^{\alpha}.$$

其中 α 是多重指标. 称一个从 \mathbb{C}^n 中开集到 \mathbb{C}^n 中开集的映射 $f = (f_1, \dots, f_n)$ 是**解析映射**, 如果每个分量 f_i 都是解析函数.

Definition 1.1.15 (复流形相关定义). 在拓扑流形 M 上, 一个**复坐标卡** (φ, U) 由一个开集 $U \subset M$ 和一个从 U 到 \mathbb{C}^n 中一个开集 V 的连续映射 φ 组成. 称两个复坐标卡 (φ_1, U_1) 和 (φ_2, U_2) **相容**, 如果 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ 或者

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)}$$

是 \mathbb{C}^n 中开集之间的复解析映射. M 上的一族**复图册** $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是指一族两两相容且覆盖整个 M 的复坐标卡. 如果两个复图册中的所有坐标卡集两两相容, 那么称它们是**等价的**. M 上的一个**复结构**指的是复图册的等价类, 赋予了复结构的拓扑流形被称为**复流形**.

复流形之间的**解析 (全纯) 映射**是指一个连续映射 $f: M \rightarrow N$, 满足对任意 M 上坐标卡 (U, φ) 和 N 上坐标卡 (V, ψ) 都有

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \rightarrow \psi(f(V) \cap U)$$

作为 \mathbb{C}^n 中开集之间的映射是解析的. 全体全纯映射构成的集合记为 $\mathcal{O}(M, N)$, 全体全纯函数 $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ 构成的 \mathbb{C} -代数记为 $\mathcal{O}(M)$. $\{\text{复流形, 复解析映射}\}$ 构成一个范畴.

通过复变函数的学习, 我们已经知道关于复解析映射的研究与光滑映射甚至实解析映射相差甚远. 我们再简单地关于多复变中的解析函数多说几句. 与单复变中类似, 我们可定义“复可微”的概念, 即在每点 a 附近存在复线性函数 $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 使得

$$f(z) = f(a) + T(z - a) + o(z - a).$$

我们可以复可微与复解析等价, 从而复可微自动蕴含光滑性质. 不过, 多复变中也有一些非常奇怪的现象, 比如下面的 Hartogs 定理:

Theorem 1.1.16 (Hartogs). 若函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 对每个分量分别全纯, 即当 Ω 中 $n-1$ 个分量任意给定时, f 关于剩下那个分量的作为单复变函数解析, 并且 f 局部有界, 则 f 作为多复变函数解析.

在单复变中, 诸多定理如唯一性定理, Cauchy 积分公式都表明解析映射的刚性足以让我们从边界上的信息推得区域内的所有信息, 但这件事情在多复变中就不对: 边界处取值未必能决定所有信息, 非常值解析映射下零点也未必构成孤立点 (从而和单复变中问题的讨论有较大区别). 但换句话说, 有关单复变的讨论, 搬到流形上也就是所谓一维复流形的理论已经非常丰富, 并且也能直观看出它和实流形有关讨论的异同点, 所以在接下来的笔记中, 一维**连通复流形**——**Riemann 面**是我们另一个讨论的重点. 我们不再赘述一遍其定义, 而是给出一些 Riemann 面的例子.

Example 1.1.17 (S^2 的复结构). 在拓扑上, S^2 是复平面 \mathbb{C} 的一点紧化. 在复变相关的讨论中它经常被记为 $\bar{\mathbb{C}}$ 或者 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. 考虑两个开集

$$U_1 = S^2 - \{\infty\} = \mathbb{C}, \quad U_2 = S^2 - \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}.$$

恒同映射 $\varphi_1 = \text{id}$ 给出复坐标卡 (U_1, φ_1) , 分式线性变换

$$\varphi_2(z) = \begin{cases} 1/z, & z \neq \infty \\ 0, & z = \infty \end{cases}$$

给出复坐标卡 (U_2, φ_2) , 我们只需考察它们之间的相容性, 这是因为相交处 $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$, 并且

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto 1/z$$

是解析自同胚. 于是这就给出了 S^2 的一个复结构, 它被称为 **Riemann 球面**. 很明显复结构蕴含光滑结构, 这给出 S^2 也是一个二维光滑流形.

Example 1.1.18 (圆环面 **Torus**). T^2 在拓扑的意义下同胚于 \mathbb{C}/Γ , 它通过 $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ 被赋予商拓扑, 其中

$$\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2, \quad \mathbb{C} = \mathbb{R}\omega_1 + \mathbb{R}\omega_2.$$

那么 Γ 将 \mathbb{C} 分为一些“网格”结构, 其中一个胞腔为

$$A = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)\}.$$

现在考虑任意一个 $A + z$, $z \in \mathbb{C}$, 根据 \mathbb{C}/Γ 的拓扑, 对每个 z , $A + z \rightarrow \pi(A + z)$ 是一个同胚, 考虑其逆给出从 \mathbb{C}/Γ 中开集到 \mathbb{C} 中开集的同胚 $\phi_z : \pi(A + z) \rightarrow A$, 所有 $\pi(A + z)$ 给出 \mathbb{C}/Γ 的一个覆盖, 容易验证它们是相容的, 这将 T^2 赋予了复结构.

我们知道复变函数中有**亚纯函数**的概念, 亚纯函数函数可以作为全纯函数的分式域, 因此在代数上带来一些好处. 在几何上, 亚纯函数可以在任何 Riemann 面上定义, 并且它可以直接被实现为从一个 Riemann 面到 $S^2 \cong \bar{\mathbb{C}}$ 的全纯映射.

Definition 1.1.19 (亚纯函数). 设 X 为 Riemann 面, 若存在一个开集 $X' \subset X$ 和全纯映射 $f : X' \rightarrow \mathbb{C}$, 使得 $X - X'$ 是孤立点集, 且对任意 $z_0 \in X - X'$ 均有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty,$$


则称 f 为 X 上的一个**亚纯函数**. $X - X'$ 中的点被称为 f 的极点. X 上的全体亚纯函数构成的集合记为 $\mathcal{M}(X)$.

与光滑流形类似, 由于对任意连通开集 $U \subset X$, U 也是一个 Riemann 面, 因此可定义 $\mathcal{O}(U)$ 和 $\mathcal{M}(U)$.

Proposition 1.1.20. X 上的亚纯函数一一对应于从 X 到 $S^2 \cong \overline{\mathbb{C}}$ 的一个全纯映射.

为了证明该命题, 我们需要先把复变中一些命题搬到 Riemann 面上.

Theorem 1.1.21 (可去奇点定理). 给定 Riemann 面 X 及 X 上一点 a , 若全纯函数 $f: X - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ 在 a 的一个邻域内有界, 则 f 可延拓为整个 X 上的全纯函数.

Proof. 只需考虑 a 附近的一个坐标卡 $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$, 则 $f \circ \varphi^{-1}$ 是 \mathbb{C} 上一个开集上的全纯映射, 利用复变中有关奇点分类的讨论, 我们得到 $f \circ \varphi^{-1}$ 可被延拓到整个 V 上, 这就证明了命题. 

Theorem 1.1.22 (唯一性定理). 给定 Riemann 面 X, Y 及全纯映射 $f_1, f_2: X \rightarrow Y$. 若 f_1, f_2 在一个有极限点的集合上等同, 则 f_1, f_2 完全等同.

直观上, 题目条件使得我们可以首先在这个极限点的局部推出 f_1, f_2 的等同关系, 然后借助连通性把正规等同关系不断向外扩充, 因此我们将采用连通性论证的方式来证明.


Proof. 只需证明

$$S = \{p \in X : \text{存在 } p \text{ 的邻域 } N \text{ 使得 } f_1(x) = f_2(x), \forall x \in N\}$$


是 X 上的既开又闭集, 然后通过连通性论证即得结论.

- 根据邻域的性质显然 S 是 X 中的开集.
- 下证明 S 是闭集, 假设存在一列 $\{p_n\} \subset S$ 使得 $p_n \rightarrow p$. 事实上, 只通过 $f_1(p_n) = f_2(p_n)$ 的信息我们就足以说明 $p \in S$.

根据 f_1, f_2 的连续性可知 $f_1(p) = f_2(p)$. 选取 p 附近的坐标卡 $\varphi: U \rightarrow V$ 和 $f_1(p) = f_2(p)$ 附近的坐标卡 $\psi: U' \rightarrow V'$ 满足 $f_i(U) \subset V'$ (之前说过, 这只是技术性的假设.) 根据解析映射的定义, $g_i = \psi \circ f_i \circ \varphi^{-1}$ 是 \mathbb{C} 上开集之间的解析映射, 并且对任意 n 均有 $g_1(\varphi(p_n)) = g_2(\varphi(p_n))$ 成立. 现在我们可以作为解析函数讨论 $g_1 - g_2$, 我们发现其零点集包含一个有极限点的集合 $\{\varphi(p_n)\}$, 因此它只能是常值函数, 进而 $g_1 = g_2$. 这也说明了 $f_1|_U = f_2|_U$, 于是 $p \in S$.

现在题目条件告诉我们 f_1, f_2 在一个有极限点的集合上等同, 遵循上面证明 S 的闭集时的方法就已经得到该极限点落在 S 中, 从而 S 非空, 然后根据连通性 (我们再次强调 Riemann 面是连通一维复流形) 就得到 $S = X$, 证毕. 

Corollary 1.1.23. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是两个 Riemann 面之间的非常值解析映射, 则 Y 中任意点的原像集都是离散集.

Proof. 任取 $y \in Y$, 在上面唯一性定理 1.1.22 中取 $f_2 \equiv c$, 根据 $f \neq c$ 可知它们只在一个离散集上等同, 即 y 的原像集是离散集. 

Remark. 这个推论也证明了我们可在 $\mathcal{M}(X)$ 上良定义除法运算, 因为不可定义点只构成一个离散集, 由此 $\mathcal{M}(X)$ 可实现为一个域.

我们在后面将看到, 关于一个点原像集的研究将成为微分拓扑中的一个重点, 在下面的例子中对此一瞥.

Example 1.1.24 (不同正则性的映射 $f : S^2 \rightarrow S^2$). 我们考虑能在多大的程度上分类这样的映射.

- f 是连续映射: 它的正则性可以非常差. 我们知道如果 f 不是满射, 那么通过一个同伦可以将 f 同伦到常值映射. 但是 f 不仅可以是满射, 并且每个点的原像集都可以是无穷大. 考虑球面到自身连续映射的同伦类相当于考虑 $\pi_2(S^2)$, 我们可以证明确实有 $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. 虽然它有纯代数拓扑的证明 (如同伦群的切除定理), 但一个好方法是建立它和一个光滑映射之间的同伦, 并借助微分拓扑的工具完成证明.
- f 是光滑映射: 我们将利用很不平凡的 **Sard 定理**, 证明一定存在一点 $y \in S^2$ 的原像是有限集并且是局部微分同胚, 用这种方法可以容易地定义**映射度**的概念. 另一种进路是考察 f 在体积形式上的拉回作用, 从而使用**积分**的方式来研究映射度, 这也可以在同伦的意义下分类所有光滑映射. 后面的部分将介绍这两种进路.
- f 是解析映射: 我们也可以类似定义映射度的概念, 但其定义就不依赖于所谓正则点, 从球面上任何点的原像都可以得到这一信息. 我们甚至可以完全分类扩充复平面到自身的所有解析映射: 这既是 \mathbb{C} 上的亚纯函数, 根据对极点附近 Laurent 级数的相关讨论, 我们可得到扩充复平面到自身的解析映射是全体**有理函数**.

1.1.3 仿射簇

我们最后再来简单介绍流形在代数几何中的对应物, 即所谓**代数簇/仿射簇**的概念. 对该讲义中代数几何的内容, 我们以称述命题为主. 简单来说, 我们考虑一族**多项式的解集**并研究它的几何形态.

Definition 1.1.25 (仿射代数集). 给定代数闭域 k , 对多项式环 $k[x_1, \dots, x_n]$ 的理想 \mathfrak{a} 定义

$$Z(\mathfrak{a}) = \{(y_1, \dots, y_n) \in k^n : f(y_1, \dots, y_n) = 0, \forall f \in \mathfrak{a}\}.$$

这样的子集被称为**仿射代数集**.

当 $k = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} 时, 我们立刻能举出很多仿射代数集的例子, 并看出它和流形之间的联系:

- n 维实球面是 $\sum x_i^2 - 1 = 0$ 的零点集, n 维复球面是 $\sum z_i^2 - 1 = 0$ 的零点集, 它就是 $2n$ 维实球面;
- (多项式) 函数的图像是 $f(x) - y = 0$ 的零点集;
- 特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 是 \mathbb{R}^{n^2} 或 \mathbb{C}^{n^2} 中多项式 $\det(A) - 1 = 0$ 的零点集.

然而对一般的代数闭域 k , 我们需要定义一个拓扑, 才可以谈论连续映射.

Definition 1.1.26 (Zariski 拓扑). 我们可验证全体仿射代数集满足**闭集公理**: 这是根据

$$\begin{aligned} Z(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) &= Z(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b}); \\ Z\left(\sum_i \mathfrak{a}_i\right) &= \bigcap_i Z(\mathfrak{a}_i); \\ Z((1)) &= \emptyset, \quad Z((0)) = k^n. \end{aligned}$$

因此全体 $Z(\mathfrak{a})$ 构成一组拓扑闭集, 它为 k^n 赋予 **Zariski 拓扑**. 注意对 $k = \mathbb{C}$ 来说, Zariski 拓扑比一般 \mathbb{C}^n 上的拓扑更粗 (闭集更少).

Example 1.1.27. 我们可以用下述例子来展现 Zariski 拓扑有多粗糙: \mathbb{C} 上的仿射代数集是某个一元复系数多项式的零点集, 根据代数基本定理 (我们会在 1.3.14 中证明它), 这是一个有限离散点集. 于是 Zariski 拓扑是 \mathbb{C} 上的余有限拓扑, 它里面的开集都特别大, 与欧氏拓扑非常不同.

反过来, 对 k^n 中的任意集合 S , 我们也能定义其对应的理想.

Definition 1.1.28. 对任意 $S \subset k^n$, 定义

$$I(S) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : f(y_1, \dots, y_n) = 0, \forall (y_1, \dots, y_n) \in S\}.$$

连接两个对应的桥梁是 Hilbert 零点定理:

Theorem 1.1.29. • $Z(I(S)) = \overline{S}$, 即它在 Zariski 拓扑下的闭包;

- (Hilbert 零点定理) $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$, 即 \mathfrak{a} 的根式理想

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ s.t. } f^n \in \mathfrak{a}\}.$$

于是仿射代数集一一对应于根式理想.

Definition 1.1.30 (仿射簇). 称一个仿射代数集是**仿射簇**, 如果它在 Zariski 拓扑下不可约, 即不能写为两个真闭子集之并. 仿射代数集是仿射簇当且仅当它对应的根式理想为**素理想**.

根据下述定理, 我们对仿射代数集的研究可以化归为对仿射簇的研究.

Theorem 1.1.31. 仿射代数集均唯一分解为有限个互不包含仿射簇之并.

根据 Hilbert 零点定理, k^n 中每个点对应 $k[x_1, \dots, x_n]$ 中的一个极大理想. 给定仿射代数簇 X , X 上的点一一对应于包含 $I(X)$ 的极大理想, 从而一一对应于商环 $k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ 的极大理想. 由此我们给出如下定义:

Definition 1.1.32 (坐标环). 对仿射代数集 $X \subset k^n$, 定义 X 对应的坐标环为 $A(X) = k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$. 每点 $p \in X$ 在坐标环上对应一个极大理想, 记为 $\mathfrak{m}_p \subset A$. 几何上, $A(X)$ 相当于模去了所有在 X 上取值为 0 的多项式, 而 \mathfrak{m}_p 则是在 p 处取值为 0 的多项式构成的等价类.

Remark. 在实际运用中 \mathfrak{m}_p 的定义似乎会随语境变化, 在讨论局部性质时它也可能代表下面所定义的局部环中在 p 处取值为零的极大理想.

接下来我们定义局部环. 定义局部环的动机是为了得到仿射簇 p 处的局部信息, 即我们仅考虑在 p 附近的一个开邻域中良好定义的函数.

Definition 1.1.33 (局部环). 对仿射代数集 $X \subset k^n$ 上一点 p , 定义局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 为坐标环 A 关于 \mathfrak{m}_p 的局部化. 具体来说, 由于 \mathfrak{m}_p 是极大理想, 因此 $A - \mathfrak{m}_p$ 是 A 中的乘性子集. 现在我们可定义 $\mathcal{O}_{p,X}$ 为全体形式分数 $\{f/g, f \in A, g \in A - \mathfrak{m}_p\}$ 在等价关系

$$f_1/g_1 \sim f_2/g_2 \Leftrightarrow \exists s \in A - \mathfrak{m}_p \text{ s.t. } s(f_1g_2 - f_2g_1) = 0$$

下的等价类.

为了理解它代表的几何信息, 我们给出正则函数的概念:

Definition 1.1.34 (正则函数). 对仿射代数集 $X \subset k^n$ 上的开子集 U , 称函数 $f : U \rightarrow k$ 在 p 处**局部正则**, 如果存在 p 点附近的 Zariski 开邻域 N 以及 $g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$, 使得在 N 上 $f = g/h$ 且 h 在 N 上处处非零. 如果 f 在 U 上每点处都正则, 则称 f 为 U 上的**正则函数**, 将全体 U 上的正则函数记为 $\mathcal{O}_X(U)$.

现在我们可以说, 局部环就是 p 处的所有局部正则函数所构成的等价类. 对局部环中的任意元素 $[f/g]$, 由于 $\{g(x) = 0\}$ 构成 X 中的一个闭集且 $g \notin \mathfrak{m}_p$, 因此 g 在 p 附近的一个开邻域上有定义, 从而是 p 处的正则函数. 另一方面, 两个 p 附近的正则函数 $f_1/g_1, f_2/g_2$ 表示同一个等价类当且仅当存在 $s \in X - \mathfrak{m}_p$ 使得 $s(f_1g_2 - f_2g_1) = 0$, 我们考虑同时让 s, g_1, g_2 取非零值的集合, 它构成 x 附近的开邻域. 则在这个更小的开邻域上的确有 $f_1/g_1 = f_2/g_2$. 因此我们可以说局部环中的元素是 p 附近的一个**芽函数**. 关于芽结构的详细讨论见定义 1.2.6.

关于正则函数和坐标环, 有如下一些结论成立:

Proposition 1.1.35. 对仿射坐标集 X , 存在从坐标环 $A(X)$ 到正则函数环 $\mathcal{O}_X(X)$ 的自然同构, 它将每个多项式等价类映为在 X 上定义的多项式函数.

也就是说, 所有在局部上正则的函数都在整体上成为某个多项式函数.

Proposition 1.1.36. 对仿射簇 X , 所有局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 可以被嵌入在 $A(X)$ 的有理函数域 $K(X)$ 中. 将 $A(X)$ 也视为 $K(X)$ 中子环, 则有

$$A(X) = \bigcap_{p \in X} \mathcal{O}_{X,p}.$$

这是上一个命题在仿射簇下的展示.

Remark. 我们在课上多次提到代数簇的概念. 代数簇的概念比仿射簇更广泛, 类似流形的定义, 代数簇在局部上看起来是仿射簇, 我们可以通过一族满足相容性条件的仿射开覆盖来定义它. 代数簇中包含射影簇 (由齐次多项式定义) 和拟仿射簇的概念, 它们都是非常重要的对象. 仿射簇是这分讲义中重点研究的对象.

最后我们来定义仿射簇之间的态射.

Definition 1.1.37 (仿射簇之间的态射). 若 $X \subset k^n$, $Y \subset k^m$ 分别为仿射簇, 称 $\varphi: X \rightarrow Y$ 是态射, 如果 φ 的每个分量都是正则函数. 有时我们也将其称为正则态射.

我们在之后的章节中会关注和仿射簇相关的几何, 尤其是对微分拓扑中的命题, 考虑它能否在代数几何中给出对应物. 直观上仿射簇会在很多地方给出光滑结构, 但也允许含有相当奇异的形态出现 (应当和后文的临界点和 Riemann 面上的奇异值区分开), 如在 \mathbb{R}^2 或 \mathbb{C}^2 中考虑 $xy = 0$ 的零点集, 它显然在 0 点附近不会局部同胚于欧氏空间. 一般来说仿射簇和流形之间会存在相似之处, 我们也经常把流形上的定义类比到仿射簇上, 但仿射簇上的研究无疑是更加复杂的, 并且多项式的结构允许我们可以运用更多数学工具来对它进行研究.

1.2 切空间与微分映射

1.2.1 切空间的多种定义

我们在 1.1.13 中证明了光滑范畴下的维数不变性, 在那里我们利用了欧氏空间的微分映射来把问题转化为线性代数. 显而易见, 将这样的结构搬到一般的微分流形上对分析问题非常有益, 这就是本节研究的重点. 回忆在欧氏空间中, 我们可以定义光滑映射的方向导数和偏导数:

$$\partial_v f|_p = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(p + \lambda v) - f(p)}{\lambda}.$$

其中 $v \in \mathbb{R}^n$ 是一个方向向量, 而偏导数相当于选择 \mathbb{R}^n 的标准基作为方向向量. 另一方面, 我们可以定义函数在一点处微分的概念, 它相当于在某点附近用线性映射来逼近函数 f .

Definition 1.2.1 (欧氏空间中的微分). 设 $f: U \rightarrow V$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ 中开集之间的光滑映射. 定义它在某点 p 处的微分为一个实线性映射 $df|_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 使得

$$f(x) = f(p) + df|_p(x - p) + o(x - p).$$

分别取 \mathbb{R}^n 和 \mathbb{R}^m 的标准基，则微分对应的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \cdots & \partial_{x_n} f_1 \\ \partial_{x_1} f_2 & \cdots & \partial_{x_n} f_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m & \cdots & \partial_{x_n} f_m \end{pmatrix}.$$

这就是大名鼎鼎的 **Jacobi 矩阵**，记作 $\text{Jac}_p(f)$ 。

微分映射最重要的性质是链式法则，即函子性：

$$d(g \circ f)|_p = dg|_{f(p)} \circ df|_p.$$

现在我们要把微分的概念推广到光滑流形上，这样就可以让我们运用上分析的强大工具。由于微分映射本身就是局部定义的，因此最 naive 的想法是直接对每点 $p \in M$ 寻找它的一个坐标卡 $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ ，再对 $f(p)$ 寻找坐标卡 $\varphi' : U' \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^m$ ，然后把切映射定义为 $d(\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}$ 。但这样做不是良定义的：因为一个点附近有很多种坐标卡选取，不同的选取显然不会得到相同的微分映射。

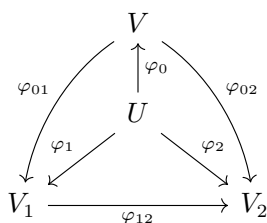
解决方法是：我们需要一个只依赖于点 p 和流形 M 的用来定义微分映射的抽象的地方，这个地方被称为**切空间**，记作 $T_p M$ 。切空间中的元素被称为**切向量**。给定一个局部坐标，切空间中的元素可以被“展现”在这个局部坐标上，在不同的局部坐标下我们有不同的“展现”。在欧氏空间中，每个点附近的切空间都典范地等同于 \mathbb{R}^n ，但是在流形上我们必须把每点附近的切空间给分开，只有在赋予坐标卡 $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ 时， U 中每一点的切空间在这一展现下被典范地等同在一起，因此可以局部上谈论切空间之间的关系等等。只要相容性被满足，那么就得到一个良定义的切空间。

Definition 1.2.2 (切空间：泛性质定义). 给定 n 维光滑流形 M 与点 $p \in M$ ， p 处的**切空间**由如下资料组成：

- 一个 n 维线性空间 $T_p M$ ；
- 对每个包含 p 的坐标卡 $\varphi : U \rightarrow V$ ，选取一个同构 $\iota_\varphi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足相容性条件：线性映射 $\iota_{\varphi'} \iota_\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 由转移映射 $\varphi' \varphi^{-1}$ 在 $\varphi(p)$ 处的微分映射 $d(\varphi' \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 所诱导。

根据上述定义，我们确实可以先对一个给定的局部坐标谈论并把该局部坐标下的切向量作为“标准的”，然后通过相容性条件就唯一确定了标准切向量在任意局部坐标下的像。通过把下述图表过渡到切空间上，我们就能说明为什么这样定义出的同

构 ι_φ 对任意两个图卡都具有相容性.



但是我们还想寻找更加直观的与坐标图卡无关的切空间的满足上述定义的**模型**，并且寻找一个足够好的模型把它推广到复流形，代数簇上.

第一个想法来自古典微分几何中的曲线论和曲面论. 我们知道，对任意一条曲线，我们可在某点处定义其切向量. 在物理上，它可以被刻画为一个质点沿曲线运动时，在该点处的速度向量. 对曲面上一点，我们也可以讨论在该点处与曲面相切的平面，被称为切平面. 这两种对象都隐含着“线性逼近”的思想，即我们选取了在该点附近最“接近”原曲线与原曲面的一个线性对象. 这个对象相当直观地体现出了“切空间”一词的形象.

然而，上面建构的一个致命的问题是整个直观的图像都是依赖于外蕴的一个“背景”上的欧氏空间的，比如在古典曲面论中就是三维空间. 一个流形可能有非常多种嵌入欧氏空间的方式（虽然我们还没有陈述子流形的定义，但这是非常直观的，比如曲线），这个问题可以通过只在给定一种嵌入的时候定义这种切空间来解决. 但另一个问题是，**是否任意流形都能被嵌入一个欧氏空间？**

答案是肯定的，这便是 **Whitney 嵌入定理**. 但这个定理证明并不平凡，我们将在后续讲义中去考虑这件事. 因此我们的确能用这种方式给任意流形一个切空间的模型. 其定义如下：

Definition 1.2.3 (切空间定义：外蕴). 给定 n 维光滑流形 M ，点 $p \in M$ 与一个嵌入 $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N) : M \rightarrow \mathbb{R}^N$. 考虑 p 附近的一个局部坐标 $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ ，则

$$\mathbb{R}^n \supset V \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^N$$

是欧氏空间开集之间的光滑映射，定义 $T_p M = \text{im } d(\Phi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}$ 为 \mathbb{R}^N 的 n 维线性子空间. 在图像中，我们经常把零点平移到 p ，这时切空间和几何上定义的切空间是一致的.

我们尝试把该定义改为一个内蕴的定义，关键在于注意到这些落在 \mathbb{R}^N 中的切向量都从何而来：对任何一条曲线 $\gamma : [-a, a] \rightarrow M \subset \mathbb{R}^N$ 使得 $\gamma(0) = p$ ，我们都可以将 $\gamma'(0)$ 实现为 \mathbb{R}^N 中的一个向量，该向量就落在上述切空间中. 另一方面，对切空间中任意向量，我们也可以通过局部坐标卡来找到一条曲线使得它成为该曲线在 0 处的切向量. 于是我们就可以用曲线本身来“表示”它对应的切向量，而曲线是内蕴的，这样全体切向量就实现为了“曲线的等价类”.（注意：这个等价关系还是要依赖于局部坐标，他并不是所谓“芽”的结构，就算两条曲线在 p 以外完全分离，它们也可能代表同一个切向量，但选择不同的局部坐标得到的结果相同.）

有没有一种定义可以完全回避局部坐标的选取, 直接借助 M 本身的信息来定义切空间? 答案是有的. 我们回顾欧氏空间的情形, 考虑方向向量的本质是为了定义一个函数的方向导数和偏导数, 进而定义一个函数的 Jacobi 矩阵 (微分映射). 所以我们并不关心几何上这些方向向量长什么样, 而更关心它们作用在函数上得到怎样的方向导数. 换句话说, 我们把每个 $\partial_v|_p$ 实现为一个算子

$$\partial_v|_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_p.$$

这也是切向量在局部坐标上总是采用

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

的记号的原因. 反过来, 怎样的算子 $D : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ 才会成为直观意义上的一个方向导数呢? 注意到一个方向导数满足下述性质:

- 线性: $\partial_v|_p(f+g) = \partial_v|_p(f) + \partial_v|_p(g)$, $\partial_v|_p(\lambda f) = \lambda \cdot \partial_v|_p(f)$.
- Leibniz 法则: $\partial_v|_p(fg) = f(p) \cdot \partial_v|_p(g) + \partial_v|_p(f) \cdot g(p)$.

幸运的是, 上面两条纯代数的性质已经足以刻画方向导数.

Lemma 1.2.4 (方向导数的代数刻画). 若一个线性映射 $D : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 Leibniz 法则:

$$D(fg) = f(p)D(g) + D(f)g(p),$$

则存在切向量 v 使得 $D = \partial_v|_p$, 即 D 是在 p 处沿 v 的方向导数.

Proof. 我们先来直观感受一下该命题为什么成立. 全体方向导数是由 $\partial_{x_i}|_p$ 张成的线性空间, 它们满足

$$\partial_{x_i}|_p(x_j) = \delta_{ij}.$$

其中括号里的这些 x_j 被我们看作“向第 j 个分量投影的函数”. 这也就是说方向导数应当被它在这些坐标投影函数上的取值所完全确定. 任何一个光滑函数在 p 处可以被一个线性映射 $df|_p$ 逼近, 这个线性映射就应当给出 f 在 D 下的取值. 我们接下来将采用积分形式的 Taylor 展开来证明这件事.

首先根据条件容易知道 $D(1) = 0$, 从而对任意常数 c 都有 $D(c) = 0$. 根据 Taylor 展开式, 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有

$$\begin{aligned} f(x) - f(p) &= \int_0^1 df|_{p+t(x-p)}(x-p) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) \cdot \partial_{x_i} f|_{p+t(x-p)} dt \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) \cdot \int_0^1 \partial_{x_i} f|_{p+t(x-p)} dt. \end{aligned}$$

两边作用 D 可知:

$$\begin{aligned} D\left((x_i - p_i) \cdot \int_0^1 \partial_{x_i} f|_{p+t(x-p)} dt\right) &= D(x_i) \cdot \int_0^1 \partial_{x_i} f|_p dt \\ &= D(x_i) \cdot \partial_{x_i} f|_p. \end{aligned}$$

于是取 $\mathbf{v} = (D(x_1), \dots, D(x_n))$ 可知

$$D(f) = \sum_{i=1}^n D(x_i) \cdot \partial_{x_i} f|_p = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \cdot \partial_{x_i} f|_p = \partial_{\mathbf{v}} f|_p.$$

证毕. \square

这个定义非常内蕴, 并且可以非常容易地推广到一般的微分流形 (以及更广的概念) 上去.

Definition 1.2.5 (导子). 设 A 是任意一个域 k 上的代数 (如 $C^\infty(U, \mathbb{R})$ 就是 \mathbb{R} -代数), B 是一个 A -双模 (我们可定义 $a \in A$ 在 b 上的左乘和右乘作用), 一个导子 $D: A \rightarrow B$ 是满足 Leibniz 法则

$$D(fg) = f \cdot D(g) + D(f) \cdot g$$

的 k -线性映射.

在上面欧氏空间的例子中, 在每点处我们通过

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f, x) \mapsto f(p) \cdot x$$

来将 \mathbb{R} 实现为一个 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -模, 这样每个方向向量就是一个 $C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ 的导子.

对一般的流形 M , 我们当然可以用全体 $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ 的导子来定义切空间, 但是切空间是一个局部性质, 我们只需要在 p 的附近获得函数的信息就够了, 它不一定要定义在整个 M 上 (在光滑范畴中, 利用单位分解我们不难在保留局部信息的前提下将一个映射延拓到整个 M 上, 但是在全纯范畴下则不行, Liouville 定理告诉我们没有所谓 “全纯截断函数”, 所以这样的定义是必要的.) 这引出了函数芽的概念.

Definition 1.2.6 (光滑函数芽). 给定光滑流形 M 上一点 p . 对任意两开集 $p \in U \subset V$, 包含映射 i 诱导出限制映射 $i^*: C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(U)$, 将 f 在限制映射下的像自然记为 $f|_U$. 定义 p 处的光滑函数芽为下述 colimit:

$$\begin{aligned} C_p^\infty(M) &= \varinjlim_{p \in U \subset M} C^\infty(U) \\ &= \coprod_{p \in U \subset M} C^\infty(U) / \{(f, U) \sim (g, V) \Leftrightarrow \exists W \subset U \cap V \text{ s.t. } f|_W = g|_W\}. \end{aligned}$$

函数芽精准地描述了如何关注局部性质这件事, 最直观的一条性质是当把 M 换成任意 p 附近的一个开集时余极限得到的结果不变. 当然我们也可以类似定义连续函数芽 $C_p(M)$, 全纯函数芽 $\mathcal{O}_p(M)$ 等等, 在后续讨论层论时我们会给一个更广泛的定义. 有了上述准备后, 我们给出切空间的下述代数定义:

Definition 1.2.7 (切空间：代数定义). 给定 n 维光滑流形 M 与 M 上一点 p , 定义切空间 $T_p M$ 为全体 $C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ 的导子. 选定一组局部坐标 $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, 则 φ 给出下述从 $T_p M$ 到 \mathbb{R}^n 的同构:

$$\begin{aligned} T_p M & \xlongequal{\quad} T_p U \xrightarrow{\sim} T_p V \xlongequal{\quad} T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \\ D & \longmapsto [f \mapsto D(f \circ \varphi)] \end{aligned}$$

此处同构性是因为 φ 是微分同胚, 容易由交换图表验证该定义满足相容性.

使用以上几种定义, 我们都可以来定义光滑映射的微分, 或者说切映射. 我们粗略提及所有构造方式.

Definition 1.2.8 (光滑映射的微分). 给定光滑流形 M, N 之间的光滑映射 $f: M \rightarrow N$. f 在点 $p \in M$ 处的微分被定义为线性映射 $df|_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$.

- 泛性质定义: 对任意一组 $p, f(p)$ 附近的局部坐标 $\varphi: p \in U \rightarrow V$ 和 $\psi: f(p) \in U' \rightarrow V'$, 下述交换图表

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{\quad} & T_{f(p)} N \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \mathbb{R}_\varphi^n & \xrightarrow{d(\psi f \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}} & \mathbb{R}_{\varphi'}^m \end{array}$$

唯一确定了一个从 $T_p M$ 到 $T_{f(p)} N$ 的线性映射. 我们可通过链式法则验证该定义和局部坐标的选取无关.

$$\begin{array}{ccccc} & T_p M & \xrightarrow{\quad} & T_{f(p)} N & \\ & \sim \downarrow & & \downarrow \sim & \\ & \mathbb{R}_\varphi^n & \xrightarrow{d(\psi f \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}} & \mathbb{R}_\psi^m & \\ \swarrow \sim & \searrow d(\varphi' \varphi^{-1})|_{\varphi(p)} & & d(\psi' \psi^{-1})|_{\psi(p)} & \searrow \sim \\ \mathbb{R}_{\varphi'}^n & & \xrightarrow{d(\psi' f \varphi'^{-1})|_{\varphi'(p)}} & \mathbb{R}_{\psi'}^m & \end{array}$$

- 几何定义: 对任意一条曲线 $\gamma: [-a, a] \rightarrow M$ 满足 $\gamma(0) = p$, $f \circ \gamma$ 是 N 上的一条过 $f(p)$ 的曲线. 定义我们就把 $[f \circ \gamma]$ (表示 $(f \circ \gamma)'(0)$) 定义为 $[\gamma]$ (表示 $\gamma'(0)$) 在 $df|_p$ 下的像.
- 代数定义: f 诱导出函数芽上的拉回 $f^*: C_{f(p)}^\infty(N) \rightarrow C_p^\infty(M)$, 对每个 p 处的导子 D 定义 $df|_p(D) = D \circ f_*$, 即

$$(df|_p)(D)(\alpha) = D(\alpha \circ f).$$

可以验证 $df|_p(D)$ 是 $f(p)$ 处的一个导子.

上面的定义都可以来证明下面重要的:

Proposition 1.2.9 (链式法则：微分映射的函子性). 设 M, N, P 是光滑流形, $f \in C^\infty(M, N)$, $g \in C^\infty(N, P)$, 则

$$d(g \circ f)|_p = dg|_{f(p)} \circ df|_p.$$

特别地, 如果 f 是光滑同胚, 则对任意 $p \in M$ 均有 $df|_p$ 是线性同构.

特别地, 考虑将坐标卡映射 $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ 看作子流形之间的光滑同胚, 则 $d\varphi|_p: T_p M = T_p U \xrightarrow{\sim} T_p V = T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ 就给出了在一组局部坐标下切空间 $T_p M$ 如何被等同到标准欧氏空间. 在线性代数下这相当于选取了一组基, 因此当我们选取了 M, N 中的两个坐标卡后, 可以谈论微分 $df|_p$ 关于它们的 **Jacobi** 矩阵.

1.2.2 切丛与可定向性

当我们规定了所有点处的切空间时, 可以把它们沿 M 粘为一个整体 (用外蕴切空间来看更为直观), 得到的结果被称为**切丛**. 为此, 我们先引入向量丛的概念:

Definition 1.2.10 (向量丛). 设 E, M 都是拓扑空间, $\pi: E \rightarrow M$ 是连续的满射, 且对任意点 $p \in M$, $E_p := \pi^{-1}(p)$ 都是 r 维**线性空间**. 若下述相容性条件成立:

对任意 $p \in M$, 存在 p 的开邻域 U 以及同胚映射

$$\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$$

使得对任意 $q \in U$, $\Phi|_{E_q}$ 是从 E_q 到 $\{q\} \times \mathbb{R}^r$ 的一个线性同构,

则称三元组 (π, E, M) 是一个**向量丛**, E 为该向量丛的全空间, M 为该向量丛的底空间, π 为丛投影映射, r 为该向量丛的秩, 每个 $E_q = \pi^{-1}(q)$ 为该向量丛在点 q 处的纤维, 并称 Φ 为该丛的局部平凡化映射. 在不引起混淆的情况下, 简称 E 是 M 上的向量丛, 或者 E 是向量丛.

若 (π, E, M) 是一个向量丛, 其中 E 和 M 都是光滑流形, 丛投影映射 $\pi: E \rightarrow M$ 是光滑映射, 且上述定义中的局部平凡化映射 Φ 都可取为微分同胚, 则称 (π, E, M) 是一个**光滑向量丛**. 在不引起混淆的情况下, 简称 E 是 M 上的光滑向量丛, 或者 E 是光滑向量丛.

虽然在上述定义中我们要求事先选取光滑流形 E , 但是在实际构造过程中, 我们更多是先作为集合定义出 E , 给出所有局部平凡化映射, 然后通过要求这些局部平凡化映射都是拓扑同胚来为 E 定义一组拓扑基. 如果 M 是光滑流形, 那么我们可以选取 U 同时是坐标卡且局部平凡, 这样 U 上的坐标卡映射 $\phi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ 可给出

$$\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\Phi} U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi \times \text{id}} V \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{m+n}$$

这样就为所有 $\pi^{-1}(U)$ 赋予了相容的坐标卡结构, 由于全体 $\pi^{-1}(U)$ 给出 E 的开覆盖, 这为 E 赋予了光滑流形结构, 并使 Φ 成为光滑映射.

根据上述讨论, 我们可以定义切丛的概念.

Definition 1.2.11 (切丛). 一个流形 M 对应的切丛 TM 在集合层面上为

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M = \{(p, \mathbf{v}) : p \in M, \mathbf{v} \in T_p M\}.$$

考虑投影映射

$$\pi : TM \rightarrow M, (p, \mathbf{v}) \mapsto p$$

通过要求对每个光滑坐标卡 $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, 使

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n, (p, \mathbf{v}) \mapsto (p, d\phi|_p(\mathbf{v}))$$

成为光滑映射, 我们可为 TM 赋予一个光滑结构, 使之成为光滑流形.

考虑两个坐标卡 $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$, 则坐标卡转移映射在其相交部分的每点处都诱导了切空间上的同构, 由此也诱导了

$$(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n, (p, \mathbf{v}) \mapsto (p, d(\phi_2 \phi_1^{-1})|_p \mathbf{v}).$$

这些自同构 $d(\phi_2 \phi_1^{-1})|_p$ 在 $GL_n(\mathbb{R})$ 中关于 p 有光滑性.

有了切丛的概念之后, 我们也可以把微分映射从一点附近搬到整个切丛上来:

Definition 1.2.12 (微分). 设 $f : M \rightarrow N$ 是光滑流形之间的光滑映射, 则

$$df : TM \rightarrow TN, (p, \mathbf{v}) \mapsto (f(p), df|_p(\mathbf{v}))$$

是光滑流形之间的光滑映射, 称为 f 所对应的微分.

在一组局部坐标系下, df 的前 n 个坐标映射分别为 f_i , 后 n 个坐标映射分别为

$$(p, \mathbf{v}) \mapsto \sum_i \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_p \cdot v_i$$

根据 f 的光滑性, 这是关于 p 和 \mathbf{v} 的光滑函数.

定义切丛最大的好处是它允许我们在整个 M 上而不只是在一点处讨论切空间, 它描述了切向量如何光滑地在 M 上运动. 在物理中我们经常提到场的概念, 标量场可以看作光滑函数, 而向量场/矢量场就是要在每点处选择一个向量并使得它们在 M 上连续/光滑. 下面的定义就描述了在向量丛上“场”的光滑性.

Definition 1.2.13 (截面). 设 (π, E, M) 是一个(光滑)向量丛. 若(光滑)映射 $s : M \rightarrow E$ 满足 $\pi \circ s = \text{id}_M$, 则称 s 是向量丛 (π, E, M) 上的一个(光滑)截面. 将全体截面构成的集合记作 $\Gamma(E)$, 全体光滑截面构成的集合记作 $\Gamma^\infty(E)$.

Example 1.2.14. M 上有非常多的几何对象和向量丛与截面有关.

- 切丛上的光滑截面也被称为**光滑向量场**. 给定一个光滑向量场, 我们就能描述一个点在该场内的运动过程, 考虑运动的轨迹会给出一些曲线, 这些曲线在每点处对应的切向量恰好就是光滑向量场在该点处的取值. 这些曲线被称之为向量场诱导出的**流**. 它不仅可用来描述物理现象, 同时也带来很多有趣的理论应用. 后文讨论的齐性引理 1.3.48 和 Morse 理论中的定理 1.4.26 即是两例.
- 在古典曲面论中, 我们可在每点处考虑垂直于切空间的**法向量**. 每点处的全体法向量构成 1 维线性空间, 它们可给出一个向量丛, 称为**法丛**. 由此我们可以讨论**光滑法向量场**的概念. 回忆在曲面论中我们称一个曲面是**可定向的**, 如果在曲面上存在光滑**单位** (或者非零) 法向量场. 比如一个球面是可定向的, 而一个 Möbius 带是不可定向的.
- 更加抽象的例子: 我们可在每点附近考虑切空间上的**对称正定双线性型** $T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ 构成的空间 (并不是线性空间, 但可以作类似讨论), 对每个局部坐标卡我们可以作局部平凡化映射, 把这些切空间都等同为 \mathbb{R}^n , 并在 $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}^n)$ 上讨论连续/光滑性. 我们可以以此为资料类似定义一个丛, 这个丛的光滑截面被称为 M 的 **Riemann 度量**. 我们容易证明根据单位分解, 我们可在每个局部选取欧氏空间的一个诱导度量, 然后将其拼起来给出整个 M 上的 Riemann 度量.

我们接下来讨论可定向性的概念. 在一般的光滑流形上法向量不是一个内蕴的概念, 我们只能借助切空间来给出类似的想法. 在 3 维空间中直观的一个想法是法向量通过**右手定则**给出了平面上一个顺时针/逆时针旋转, 这就将平面赋予了两种不同的方向. 我们可用多种方式将这样的想法严格化, 一种容易理解的方式是利用所谓**标架**的概念: 在内积空间 \mathbb{R}^n 中, 每组 (有序) 基 (e_1, e_2, \dots, e_n) 给出一个 \mathbb{R}^n 中的**标架**, 由标准基 (x_1, \dots, x_n) 给出的标架称为**标准标架**. (在 3 维空间中想象这些标架非常直观.) 这些标架在差一个**坐标变换**的意义下可以相互到达, 由于坐标变换矩阵是可逆矩阵, 因此我们可以讨论其行列式的正负性. 如果两个标架能通过一个行列式为正的坐标变换像相互到达, 就称他们处于同一个标架类中, 这显然给出一个等价关系. 和标准标架在同一个等价类里的被称为**正标架类**, 反之称为**负标架类**. 选取了标架类的线性空间被称为**定向线性空间**. 现在给定 \mathbb{R}^{n+1} 中第 0 个分量上的单位向量, 将其视为法向量, 那么我们就**唯一确定**了后 n 个分量张成超平面上的一个标架类, 使得把该法向量添加在该标架类的第一个分量上给出 \mathbb{R}^{n+1} 的一个正标架类. 这样我们就用 \mathbb{R}^n 上的正负标架类来刻画了法向量的正反关系.

回到流形上来, 我们希望在每点的切空间处选取一个标架类, 使得每点附近的标架类定向相同. 对切空间本身来说不存在标准标架的概念, 但切空间上的标架仍然恰好构成两个等价类, 因此我们只需钦定等价类. 局部的相容性是容易定义的, 因为我们可以利用坐标卡映射把整个标架推出到欧氏空间中, 这就使得我们可以在同一个空间中谈论这些标架是否属于同一标架类中. 总结一下, 我们给出下述定义:

Definition 1.2.15 (流形定向: 标架类定义). 设 M 是一个光滑流形, 如果我们可在每点 p 的切空间 $T_p M$ 上选取一个标架类 E_p , 使得在任意坐标卡映射 $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ 下, 对任意 $q \in U$ 均有 $d\varphi|_q(E_q)$ 和 $d\varphi|_p(E_p)$ 标架类相同, 则将其称之为 M 的一个**定向**. 如果 M 存在定向, 则称 M 是**可定向**光滑流形.

如果存在一个好的标架类选取方式, 那么我们总是可以在每点附近选择一个坐标卡, 使得将这点处的标架推出到欧氏空间后和标准标架定向相同. 所有这些坐标卡构成了 M 的一个开覆盖, 并且如果两个坐标卡相交, 在它们相交部分的坐标变换会把一个标准标架**保定向地**送到另一个标准标架, 也就是说:

$$\det d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})|_{\varphi_1(p)} > 0, \quad p \in \varphi_1(U_1 \cap U_2).$$

反之, 如果这样一族坐标卡覆盖存在, 那么我们可用坐标卡映射在每点处任意拉回某个坐标卡上的标准标架, 所得结果在差一个标架类的意义上是相同的. 这就意味着我们可在每点处找一个标架类使得局部相容性成立. 所以这两种定义是等同的, 这样我们就得到了微分流形定向的标准定义, 它可以完全不涉及到标架或者向量丛的语言来称述.

Definition 1.2.16 (流形定向: 坐标卡定义). 设 M 是一个光滑流形. 称 M 上的两个坐标卡是**定向相容的**, 如果它们相交部分上的转移映射在每点处诱导出的微分映射行列式恒正, 这时我们也称该转移映射是**保定向的**. 若 M 上存在一个光滑图册, 使得图册内任意两个坐标卡都是定向相容的, 则将其称为 M 上的一个**定向**. 若 M 上存在定向, 则称其为可定向流形.

上述的两个定义可以显然推广到任意向量丛上, 即我们说一个向量丛是可定向的, 如果在每点的纤维上可以选取一个标架使得局部相容性成立, 或者适当选取局部平凡化映射使得所有转移映射都是保定向的. 那么流形的可定向性与流形所对应切丛的可定向性本质上是相同的.

我们可以简单地继续向下讨论. 上述利用标架的定义还有更技术化的方式, 对一个 n 维线性空间 V 我们可以讨论其**最高阶外幂** $\wedge^n V$, 它是一个一维线性空间. 它和法向量的功能完全类似, 因为一个标架自动被对应到 $\wedge^n V$ 上的一个非零向量, 两个相同定向标架之间差一个正常数, 相反定向标架之间差一个负常数. 在欧氏空间中, 借助标准标架我们能自然地把 $\wedge^n \mathbb{R}^n$ 等同为 \mathbb{R} . 于是我们可以把某个局部坐标卡上的 $\wedge^n T_p M$ 都等同到 \mathbb{R} , 现在它们定向相容当且仅当它们的符号都相同, 这等价于它们均非零 (由连续性保证). 于是我们只需处处非零性成立, 这允许我们非常简单地称述定向的定义:

Definition 1.2.17 (流形定向: 最高阶外幂定义). 设 M 是一个光滑流形, 考虑切丛 TM 可诱导出最高外幂切丛 $\wedge^n TM$. 我们将 $\wedge^n TM$ 的一个**处处非零**的光滑截面称为 M 的一个**定向**. 若 M 存在定向, 则称其为可定向流形.

Remark. 该定义实际上是常见的, 只不过我们一般用余切空间的 n 次外积 $\bigwedge^n T^*M$ 来定义. $\bigwedge^n T^*M$ 上的光滑截面被称为 n -形式, 而处处非零的 n -形式又被称为**体积形式**. 所以流形可定向当且仅当存在体积形式.

同样地, 该定义可以对任意向量丛称述, 我们一般把其最高阶外幂生成的丛称为**行列式丛** (determinant bundle).

如果在 M 上赋予 Riemann 度量, 那么我们就可以讨论切向量的模长, 进一步也能在 n 次外积空间中讨论模长. 如果在 $\bigwedge^n TM$ 上存在处处非零的光滑截面 s , 那么 $s/|s|$ 就会给出所谓单位光滑截面. 而由于 $\bigwedge^n T_p M$ 是一维的, 因此它上面就恰好存在正负两个单位向量. 当一个连通流形可定向时, 在某点处确定一个 $\bigwedge^n T_p M$ 上的单位向量会通过光滑性来唯一确定每点处的一个单位向量, 从而唯一确定一个单位光滑截面. 在这个意义上流形恰好存在两个定向. 对一般的向量丛, 我们都可以通过寻找度量的方式来给出该向量丛所对应的一个**单位球丛**, 并将向量丛的可定向性和球丛的可定向性联系起来. 一维向量丛对应的球丛每点处的纤维为 S^0 , 是恰含两个点的离散集. 此时球丛也给出了底流形 M 上的**2 叶覆叠**. 根据刚刚的讨论, 向量丛可定向当且仅当这个 2 叶覆叠是平凡的, 因为两个光滑截面恰好把球丛分割为两个不同的连通分支. 反之, 如果 M 不可定向那么在 M 上一定存在一个非平凡的 2 叶覆叠. 特别地我们得到下述结论:

Proposition 1.2.18. 单连通 (我们暂时要加上光滑) 流形一定是可定向的.

这又引向了流形可定向性和流形本身的拓扑性质之间的关系. 实际上对一般拓扑流形, 借助最高阶同调群我们可以模仿上面的精神在每点处定义**局部定向**为 $H_n(M, M-p; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 的两个生成元之一, 对紧流形来说 $H_n(M)$ 的生成元就对应一个流形的定向, 称为 M 的一个**基本类**. 坐标卡映射结合切除定理仍然可用来定义局部相容性, 于是我们会去类似讨论以 $H_n(M, M-p; \mathbb{Z})$ (或者其生成元) 作为纤维的**定向丛**, 并以定向丛的截面来定义整体的可定向性. 我们会发现可定向性和流形的最高阶同调高度相关, 并且还给出了 k 阶同调和 $n-k$ 阶上同调之间的对偶关系, 称之为**Poincaré 对偶**. 对光滑流形而言, 我们可以完全用微分形式所给出的 de Rham 上同调的语言来描述这一对偶关系.

值得一提的是我们也可以把 \mathbb{Z} 换成任意的环 R 去定义 R -可定向性, 不过它们都能被一般的 \mathbb{Z} -可定向性信息完全确定. 但这仍然会给出非平凡的理论, 因为我们会知道任何流形都是 \mathbb{Z}_2 -可定向的, 从而在 \mathbb{Z}_2 系数下仍然有对偶性及很多命题成立. 在流形理论中, 我们经常会在不假设可定向性的条件下见到 mod 2 意义下的不变量, 在假设可定向性时才会给出 \mathbb{Z} -不变量. 这里解释了在拓扑层面上为什么这样的现象会产生.

1.2.3 复切空间和代数簇上的切空间

我们接下来将把上面的定义扩展到 Riemann 面上, 这个定义对一般的复流形也是适用的. Riemann 面是一维复流形, 因此我们期望它具有一维复切空间. 在复情形下外蕴的直观变得很微弱 (我们甚至无法想象 \mathbb{C}^2), 如果我们要用曲线的方法定义切空间, 则会得到所谓“复曲线” $\gamma: \mathbb{C} \rightarrow X$ 的等价类. 这种方法虽然可以走通, 但仍然不直观. 最好的方式就是用代数方法逐字地翻译定义.

Definition 1.2.19 (复切空间). 给定 Riemann 面 X 与 X 上一点 x , 定义复切空间 $T_p^{\mathbb{C}}M$ 为全体 $\mathcal{O}_p(X) \rightarrow \mathbb{C}$ 的导子 (满足复线性和 Leibniz 法则).

我们先考虑 \mathbb{C} 上开集 V 的复切空间结构, 并证明它是复一维的. 首先根据复导数的定义, $\frac{\partial}{\partial z}$ 是一个满足要求的导子. (注: 我们暂时不要把它想象和实导数有关系, 它就是一个可以良定义在全纯函数芽上的算子)

另一方面, 对任意导子 D , 首先对常值函数芽 $[c] \in \mathcal{O}_p(V)$ 有 $D([c]) = 0$. 另一方面, 对任意 $[f] \in \mathcal{O}_p(V)$, 它可在 p 附近的邻域 N 内展开为

$$f(z) = f(p) + f'(z) \cdot (z - p) + g(z) \cdot (z - p)^2.$$

其中 g 解析. 因此根据 Leibniz 法则可知 $D((z - p)^2) = D(z - p) \cdot 0 + 0 \cdot D(z - p) = 0$, 所以

$$D(f) = f'(z)D(z) + D(g) \cdot 0 + g(p) \cdot 0 = f'(z)D(z) = D(z) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}.$$

这里解析性使得我们比实情形的讨论要容易很多. 所以复切空间就是由 $\frac{\partial}{\partial z}$ 张成的一维复线性空间, 通过选取局部坐标卡带来的解析同胚, 这就说明了我们定义的 $T_p^{\mathbb{C}}M$ 也是复一维的.

我们知道 Riemann 面也能被自然地视为实二维光滑流形, 因此它对应一个二维实线性切空间 $T_p^{\mathbb{R}}M$. 我们希望在 Riemann 面的研究中同时利用它作为实流形与复流形的性质, 因此需要在这两个切空间中建立联系. (比如我们在复变函数中总是考虑全纯函数 (实际上是 1-form) 沿一条实曲线的积分, 这就强迫我们就把它单纯看作“复化”了的曲线积分; 比如我们只能在光滑范畴中进行单位分解等等)

还是先回到 \mathbb{C} 中看问题: 它作为实平面在 p 处的二维实切空间的一组基是 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}$. 我们的第一个观察是这两个算子都可以实现为 $\mathcal{O}_p(X) \rightarrow \mathbb{C}$ 的导子, 此时

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(p + \lambda) - f(p)}{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(p + \lambda i) - f(p)}{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot i. \end{aligned}$$

因此我们也可以说 $\frac{\partial}{\partial x}$ 或者 $\frac{\partial}{\partial y}$ 给出了一维复切空间的基, 但是这种说法就比较奇怪, 我们可以换一个角度去想这件事: 全纯函数芽 $\mathcal{O}_p(X)$ 是光滑函数芽 $C_p^{\infty}(X)$ 的

“让导子等同关系出现”的子空间. 实际上这就是我们考虑 Cauchy-Riemann 方程时的进路, 让我们把它严格化:

首先我们这里考虑的光滑函数芽其实是 $C_p^\infty(X, \mathbb{C})$, 考虑的导子是 $C_p^\infty(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ 的复线性导子. 注意它可以在实流形上定义, 得到的结果不过是实切空间的复化 $T_p^{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C}$, 我们把它称之为**复化切空间**. 对 $X = V \subset \mathbb{C}$, 我们得到一个二维复线性空间, 它的一组基是 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}$. 如果我们定义

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

那么 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 也构成 $T_p^{\mathbb{R}}V \otimes \mathbb{C}$ 的一组基.

现在回到复流形上, $T_p^{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C}$ 在不同坐标卡上的展现之间相差一个解析映射 f . 我们将它视作光滑映射, 这样可以讨论它在复化切空间上的行为. 设 $f = u + iv$, 那么它的转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_p & \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_p \\ \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_p & \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

即它可视为一个复一维线性映射忘记复结构后视为实线性映射的结果. 在复化切空间下转移映射对应的矩阵相同, 但此时就能进行对角化: 我们可以验证 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 分别是它的两个特征向量.

这就导致复化切空间存在一个典范的直和分解:

$$T_p^{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C} = T_p^{(1,0)}X \oplus T_p^{(0,1)}X.$$

使得在**任何**局部坐标 z 下, $T_p^{(1,0)}X$ 对应到 $\mathbb{C} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$, $T_p^{(0,1)}X$ 对应到 $\mathbb{C} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$; 并且对任何全纯映射 $f: X \rightarrow Y$, 作为实微分映射的 $df|_p$ 把 $T_p^{(1,0)}X$ 映到 $T_{f(p)}^{(1,0)}Y$, 把 $T_p^{(0,1)}X$ 映到 $T_{f(p)}^{(0,1)}Y$.

最后, 复化切空间中 $T_p^{(0,1)}X$ 部分在全纯函数芽上作用的结果恒为零, 而 $T_p^{(1,0)}$ 部分导子的作用效果互不相同, 于是我们就可以把 $T_p^{(1,0)}$ 作为 **Riemann 面的复切空间**, 并且可以定义复意义下的微分映射 $df|_p^{\mathbb{C}}: T_p^{(1,0)} \rightarrow T_{f(p)}^{(1,0)}$, 它就和我们一开始利用全纯函数芽给出的定义吻合.

为了加深对上述讨论的理解, 我们说明下述命题成立:

Proposition 1.2.20. 复流形 (作为实光滑流形) 总是可定向的. 特别地, 所有 Riemann 面都是可定向 2 维流形.

Proof. 我们采用转移函数的定义, 证明可以理解为是纯线性代数的: 对任意转移映射 f , $df|_p^{\mathbb{C}}$ 诱导出 n 维复线性空间的自同构 $df|_p^{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ (对应 $T_p^{\mathbb{C}}$), 我们暂且把这里的 \mathbb{C}^n 记作 V . 将其忘记复结构得到 $2n$ 维实线性空间, 我们可以证明作为实线性映射 $df|_p^{\mathbb{R}}: V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ (对应 $T_p^{\mathbb{R}}$), 有

$$\det df|_p^{\mathbb{R}} = |\det df|_p^{\mathbb{C}}|^2 > 0.$$

这是因为 $df|_p^{\mathbb{R}}$ 定义在复化空间 $V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ (对应 $T_p^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$) 上给出的映射行列式和 $V_{\mathbb{R}}$ 上是等同的, 而在复化空间上 $df|_p^{\mathbb{R}}$ 有两个不动子空间 (对应 $T_p^{(1,0)}$ 和 $T_p^{(0,1)}$), 并且在这两个空间上的映射恰好同构于 $df|_p^{\mathbb{C}}$ 和 $\overline{df|_p^{\mathbb{C}}}$. 于是 $\det df|_p^{\mathbb{R}} = \det df|_p^{\mathbb{C}} \cdot \overline{\det df|_p^{\mathbb{C}}}$, 这就证明了结论. (值得一提的是, 该线性代数命题是笔者第一学期高等代数的期末题目.) 所以任意选定复坐标卡, 它们之间的转移映射都满足行列式恒正, 从而一定是定向相容的, 这就给出了复流形的一个定向. \square

我们可以类似证明如果将复向量丛 (其转移映射在每个纤维上都给出复线性同构) 视为实向量丛, 其转移映射行列式也恒正, 从而复向量丛也总是可定向的. 类似之前对定向性的多种定义, 我们也可以考虑用复切丛对应的行列式丛是否平凡来定义可定向性 (ref. 定义 1.2.17), 或者考虑全纯体积形式的存在性. 用这种方法定义出的可定向性闭上述“实定向性”要强很多, 比如它可以推出该复流形的第一个 Chern 类为零, 从而给出一个自旋结构. 存在全纯体积形式同时也定义 Calabi-Yau 流形的必要条件.

我们接下来在仿射簇上定义切空间. 研究仿射簇的切空间同样有内蕴和外蕴两种视角, 但在这之前我们需要先讨论何为内蕴定义——因为我们在 1.1.3 节初步讨论仿射簇性质时总是把它视为某个 k^n 中的多项式理想零点集.

在抽象的仿射簇中, 核心观点是把点替换成极大理想, 这样就可以完全在环层面上讨论问题而不需要把点对应于某个坐标.

Definition 1.2.21 (仿射簇: 抽象定义). 一个仿射簇是一个三元组 $(X, \mathcal{O}_X, k[X])$, 其中:

- $A = k[X]$ 是一个有限生成既约 k -代数 (称为坐标环);
- $X = \text{MaxSpec}(A)$ 是 A 的所有极大理想组成的集合;
- \mathcal{O}_X 是 X 上的结构层, 对每一点 $P \in X$, 它在每点处的纤维 (茎) 为局部环

$$\mathcal{O}_{X,P} = A_{\mathfrak{m}_P}$$

其中 \mathfrak{m}_P 是对应于 P 的极大理想.

Remark. 我们在该讲义中没有解释过什么是层, 但我们解释过函数芽 1.2.6 和向量丛 1.2.10 的定义, 它们可帮助我们理解层结构. 拓扑空间 X 上的层结构为每个 X 中的开集 U 赋予一个对象 $F(U)$, 比如我们以环对象为例, 使得相互包含的开集 $U \subset V$ 之间有“自然”的限制同态 $\text{Res}|_U : F(V) \rightarrow F(U)$. 此外, 还需满足局部性公理 (若两个定义在大开集上的对象在某个开覆盖中的任意小开集上都等同, 那么它们也等同) 与粘合公理 (如果能在某个开覆盖的每个开集上拣取一个对象使得它们两两在相交部分上的限制等同, 那么他就能定义整体上的一个对象). 流形上的光滑函数芽层是层的典范例子, 我们只用靠它来提供直观.

给定 A 的一组生成元 a_1, \dots, a_n , 我们就能通过满同态 $k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A, x_i \mapsto a_i$ 来定义出 $I(X) \subset k[x_1, \dots, x_n]$, 从而给出了 X 在 k^n 中的嵌入. 仿射簇可以通过不同的方式嵌入到不同维数的仿射空间中.

对于接下来的讨论, 我们只用从上面的定义提取出坐标环和局部环是只和仿射簇本身有关的性质. 先从外蕴切空间开始.

Definition 1.2.22 (仿射簇上的切空间: 外蕴定义). 给定仿射簇 $X \subset k^n$ 与 V 上一点 $p = (x_1, \dots, x_n)$. 设 X 对应于理想 \mathfrak{a} . 定义 p 处的 (外蕴) 切空间为

$$T_p X = \{v = (v_1, \dots, v_n) : df|_p(v) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_p \cdot v_j = 0, \forall f \in \mathfrak{a}\}.$$

这很好理解: X 是 \mathfrak{a} 中全体多项式的零点集, 所以这些多项式沿 X 上任意曲线的取值变化率均为 0, 进而导致切空间就由使得所有多项式在该点求偏导都为零的向量构成. 注意这里 f 都是 $k[x_1, \dots, x_n]$ 中的多项式, 我们可以定义形式偏导数, 从而可以定义所谓“微分映射”. 根据线性和 Leibniz 法则, 如果 \mathfrak{a} 由有限个多项式 f_1, f_2, \dots, f_m 生成, 那么我们只需验证有限个多项式对应的微分映射在 v 上的取值为零.

$$df|_p(v) = 0, \forall f \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow df_i|_p(v) = 0, i = 1, \dots, m.$$

由于每个 $df_i|_p$ 的核维数是余一维的, 故此时切空间的维数至少为 $n - m$.

接下来考虑利用导子的定义. 标准的方法是用局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$ 对应欧氏空间中的光滑函数芽, 因为 p 处的切空间本质上只和 p 附近的局部信息有关.

Definition 1.2.23 (仿射簇上的切空间: 内蕴定义). 给定 (抽象) 仿射簇 X 与 X 上任意一点 p , 定义点 p 处的切空间 $T_p X$ 为全体导子 $D : \mathcal{O}_{X,p} \rightarrow k$. 具体而言, D 满足

- k -线性: $D(af + bg) = aD(f) + bD(g)$ 对任意 $f, g \in \mathcal{O}_{X,p}$ 成立.
- Leibniz 法则: $D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f)$ 对任意 $f, g \in \mathcal{O}_{X,p}$ 成立.

注意根据局部环的定义, 在同一个等价类中的元素在 p 点处取值是相同的.

我们也可以将上述定义中的 $\mathcal{O}_{X,p}$ 替换为坐标环 A , 然后定义 p 处的切空间为全体 $A \rightarrow \mathbb{C}$ 的导子, 其中双模结构为 $f \cdot c = f(p)c$. 这样的导子被称为 p 处的整体导子. 这是因为给定一个 A 上的导子, 我们可以将其通过扩展的 Leibniz 法则为所有 f/g 定义

$$D(f/g) = \frac{D(f)g(p) - f(p)D(g)}{g(p)^2}.$$

可以验证这延拓为了 $\mathcal{O}_{X,p}$ 上的一个导子. 另一方面, 局部环上的一个导子通过限制映射直接给出了整体导子.

Remark. 只有在仿射簇上这两种定义才是等同的, 而对一般的代数簇只有局部环定义是可行的.

Example 1.2.24. 我们可以把目光聚焦在在 p 处取值为零的那些 $\mathcal{O}_{p,X}$ 中元素, 即考虑 $T_p X$ 在 $\mathfrak{m}_p \subset A \subset \mathcal{O}_{X,p}$ 上的 k -线性函数. 此时我们发现 Leibniz 法则告诉我们对 $f, g \in \mathfrak{m}_p$ 总有 $D(fg) = 0$, 从而对任意 $f \in \mathfrak{m}_p^2$ 都有 $D(f) = 0$. 另一方面, 对任意 $f \in \mathcal{O}_{X,p}$ 都有 $f - f(p) \in \mathfrak{m}_p$, 而在差一个常数的意义下导子作用不变. 于是在 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 上定义的 k -线性函数可复原为 $\mathcal{O}_{X,p}$ 上的一个导子. 于是我们可以说

$$T_p X \cong (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*.$$

这一想法对微分流形和复流形也是成立的. 在一些教材中我们会先把余切空间定义为 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{p}^2$, 再将切空间定义为其对偶空间.

在光滑流形和复流形中, 每点处的切空间维数是相同的, 并且它们均对应于流形本身的维数. 然而在仿射簇上, 首先要定义其维数就并不容易, 其次并不是所有点处切空间维数都和仿射簇的维数相同.

Definition 1.2.25 (仿射簇的维数). 对一个仿射簇 X , 其维数 $\dim X$ 有以下几种等价的代数定义:

1. **坐标环的 Krull 维数:** $\dim X$ 定义为坐标环 $A(X)$ 的 Krull 维数, 即素理想链的最大长度:

$$\dim A(X) = \sup\{n \mid \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n \subset A(X) \text{ 为素理想链}\}$$

2. **超越次数:** 若 X 是仿射簇, 其有理函数域 $K(X)$ 是有限生成域扩张 $k \hookrightarrow K(X)$, 则

$$\dim X = \text{tr. deg}_k K(X)$$

即域扩张的超越次数.

3. **几何维数:** 在代数闭域上, $\dim X$ 等于 X 到仿射空间的一般有限满态射的像的维数, 或等价于 X 中不可约分支的最大维数。

我们可以证明作为 Krull 维数有

$$\dim A(X) = \dim \mathcal{O}_{X,p}, \quad \forall p \in X.$$

于是根据切空间的代数定义,

$$\dim T_p X = \dim(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2) \geq \dim \mathcal{O}_{X,p} = \dim X.$$

由此我们可为 X 上的点分类.

Definition 1.2.26 (光滑点和奇异点). 给定仿射簇 X . 称 X 上一点 p 为光滑点, 如果有 $\dim X = \dim T_p X$ 成立. 称 p 为奇异点, 如果有 $\dim X < \dim T_p X$ 成立.

事实上, 光滑点正如其名, 我们有如下的结论成立:

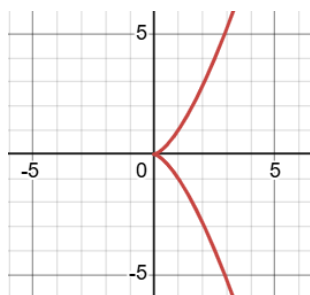
Proposition 1.2.27 (光滑点构成流形). 设 $X \subset k^n$ 是一个仿射簇. 当 $k = \mathbb{R}$ 时, X 上的全体光滑点 (在欧氏拓扑下) 构成一个光滑流形. 当 $k = \mathbb{C}$ 时, X 上全体光滑点 (在标准拓扑下) 构成一个复流形. 流形的维数就等于仿射簇的维数 $\dim X$.

Example 1.2.28. 考虑 $\text{char } k = 0$. k^2 上由 $y^2 - x^3 = 0$ 定义的曲线 X , 则 $A(X) = k[x, y]/(y^2 - x^3)$. 考虑其对应的有理函数域 $K(X)$, 令 $t = y/x \in K(X)$, 则 $t^2 = y^2/x^2 = x$ 而 $t^3 = y^3/x^3 = y^3/y^2 = y$. 因此有理函数域 $K(X)$ 可以由一个变元 t 所单生成, 这导致我们有 $\dim X = 1$.

另一方面, 考虑每点处的切空间维数. 由于 $I(X)$ 仅由 $f(x, y) = y^2 - x^3$ 定义, 因此

$$\dim T_p X = \dim \ker df|_{(x,y)} = \begin{cases} 1, & \nabla f|_{(x,y)} \neq 0; \\ 2, & \nabla f|_{(x,y)} = 0 \end{cases}.$$

而 $\nabla f = (-3x^2, 2y)$, 所以对任意 $p \neq (0, 0)$ 都有 $\dim T_p X = 1$ 而对 $p = (0, 0)$ 有 $\dim T_p X = 2$. 所以该曲线在 $(0, 0)$ 处为光滑点. 若取 $k = \mathbb{R}$, 则在零点附近 X 形如下图:



而当 $k = \mathbb{C}$ 时,

$$\Phi: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow X, \quad t \mapsto (t^2, t^3)$$

给出了从 $\mathbb{C} - \{0\}$ 到 X 中全体光滑点的解析同胚. 这也就是说, 作为 Riemann 面 $X - (0, 0)$ 解析同胚于 $\mathbb{C} - \{0\}$.

接下来我们来仔细研究一些奇异点附近的几何. 是实情形下奇点可能只会展现为图像上的一处非光滑, 然而在复空间上情况大有不同. 比如说考虑 \mathbb{C}^2 上的某条代数曲线的孤立奇点 p , 我们可考虑足够接近 p 的一个球面 (视为实 3 维球面 S^3) 与代数曲线的图像相交所得的结果, 其图像应当是 S^3 上的一个**实一维流形**. 一维流形本身没有什么可研究的, 但是它嵌入在 S^3 中, 有非常丰富的纽结理论 (初步介绍可见 1.4.14 最后的部分), 而奇点附近的几何就会给出一维流形在三维空间中缠绕的例子. 我们下举两例.

Example 1.2.29. 考虑曲线 $X: xy = 0$. 在 $k = \mathbb{R}$ 上曲线的图像就是两条相交直线, 没有值得研究的. 而当 $k = \mathbb{C}$ 时, 我们用 $S_\delta^3 = \{(x, y) : |x|^2 + |y|^2 = \delta^2\}$ 与 X 相交

可得

$$\begin{aligned} S_\delta^3 \cap X &= \{(x, 0) : |x| = \delta\} \cup \{(0, y) : |y| = \delta\} \\ &= \{(\delta \cos \theta, \delta \sin \theta, 0, 0) : \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, \delta \cos \varphi, \delta \sin \varphi) : \varphi \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

是两个分离圆周之并，分别记为 K_x 和 K_y . 为了方便看清它们之间的结构，我们将 S_δ^3 球极投影为 $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. 选取投影极点为 $P = (0, 0, 0, \delta) \in S_\delta^3$ ，球极投影

$$\pi : S_\delta^3 \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

定义为

$$\pi(x_1, x_2, y_1, y_2) = \left(\frac{\delta x_1}{\delta - y_2}, \frac{\delta x_2}{\delta - y_2}, \frac{\delta y_1}{\delta - y_2} \right). \quad (1)$$

该映射是到 \mathbb{R}^3 的同胚，且 $\pi(P) = \infty$.

将 K_x 和 K_y 的表达式分别代入 (1) 得 K_x 在球极投影下的像就是删去最后一个坐标分量，即在平面 $z = 0$ 上的圆 $x^2 + y^2 = \delta^2$. 而 K_y 的表达式会过点 $(0, 0, 0, \delta)$ ，剩下部分在球极投影下的像为

$$\pi(0, 0, \delta \cos \varphi, \delta \sin \varphi) = \left(0, 0, \frac{\delta \cos \varphi}{\delta - \delta \sin \varphi} \right) = \left(0, 0, \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \right).$$

于是其像为整个 z 轴并上无穷远点，这就看出了这两个圈之间构成 **Hopf 链环**：这两个圈在 S^3 中被扣在一起无法分开.

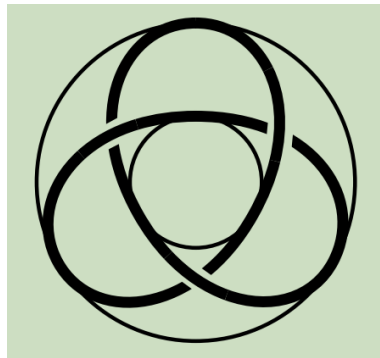
Example 1.2.30. 我们接着例 1.2.28 讨论 $X : y^2 - x^3 = 0 \subset \mathbb{C}^2$. 考虑

$$S_\delta^3 \cap X = \{(t^2, t^3) : t \in \mathbb{C}, |t|^4 + |t|^6 = \delta^2\}.$$

根据模长表达式我们能反解出唯一的 $\varepsilon > 0$ ，于是上式可写作：

$$S_\delta^3 \cap X = \{(\varepsilon^2 e^{2i\theta}, \varepsilon^3 e^{3i\theta}) : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

由于整个 $S_\delta^3 \cap X$ 落在 $\{(z, w) : |z| = \varepsilon^2, |w| = \varepsilon^3\} \cong S^1 \times S^1$ 上，这在 S^3 上实现为一个环面，因此 $S_\delta^3 \cap X$ 是一个能嵌入在环面中的纽结，其图像大概如下：



它被称为 $(2,3)$ -环面结，即我们熟知的三叶结，因为它沿环面的横截面绕了两圈而沿纵向切面绕了三圈. 我们能够通过这种方法构建出多种不同的环面结.

由这样的方法出发, 我们可以考虑对仿射簇上的奇点进行分类, 它被称作**简单奇点的 ADE 分类**, 它源于 1970 年代 Vladimir Arnold 对全纯函数芽的分类工作, 后来发现与 Dynkin 图, 李代数表示论有深刻联系. 我们刚刚讨论的 $y^2 - x^3 = 0$ 拥有一个 A_2 型奇点, 属于所谓的**尖点 (cusp)** 奇点. 其它的一些例子比如

- $x(y^2 + x^3) = 0$ 拥有一个 D_5 型奇点, 链环由一个分支和一个三叶结相连接.
- $y^3 + x^5 = 0$ 拥有一个 E_8 型奇点, 其链环是 $(3, 5)$ -环面结, 也是正二十面体对称性的纽结. 这是最简单的拓扑非平凡纽结之一.

更多内容在这里不再讨论.

1.3 局部性态与整体性态

1.3.1 反函数定理与局部性质

本节我们从欧氏空间中的**反函数定理与隐函数定理**出发, 来研究流形上的局部性态. 并寻求它和整体性态之间的联系. 首先我们有局部微分同胚的定义:

Definition 1.3.1 (局部微分同胚). 设 $f: M \rightarrow N$ 是光滑映射, p 是 M 上一点. 若存在 p 在 M 上的邻域 U_p 与 $f(p)$ 在 N 上的邻域 $V_{f(p)}$ 使得

$$f|_{U_p}: U_p \rightarrow V_{f(p)}$$

是光滑流形之间的微分同胚, 则称 f 在 p 处是**局部微分同胚**.

数学分析中的反函数定理告诉我们:

Theorem 1.3.2 (反函数定理). 设 $f: U \rightarrow V$ 是欧氏空间开集之间的光滑映射, 若 $df|_p$ 为**线性同构**, 则 f 在 p 处是局部微分同胚.

其证明用到**压缩映像定理**, 是数学分析中证明最困难的定理之一. 该定理可显然地推广到微分流形上.

Theorem 1.3.3 (反函数定理: 微分流形情形). 设 $f: M \rightarrow N$ 是光滑映射, p 是 M 上一点. 若 $df|_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 为**线性同构**, 则 f 在 p 处是局部微分同胚.

从局部微分同胚到微分同胚其实差的也并不多, 这是因为只要作为集合上的映射 f^{-1} 存在, 那么它的连续性和光滑性都是局部性质, 这都是局部微分同胚能保证的. 因此如果可以证明 $df|_p$ 处处非退化, 那么只要 f 是单射, 那么 f 就是 M 到它像集 $f(M)$ 的微分同胚; 只要 f 是双射, 那么 f 就是 M 到 N 的微分同胚.

Example 1.3.4 (Riemann 面的情形). 给定 Riemann 面之间的解析映射 $f: X \rightarrow Y$, 则只要 f 在某点处的微分映射非零 (或者说在取定任意局部坐标后复导数为零), 则 $df|_p: T_p^{(1,0)} M \oplus T_p^{(0,1)} M \rightarrow T_{f(p)}^{(1,0)} N \oplus T_{f(p)}^{(0,1)} N$ 给出复化切空间之间的同构. 于是 f 在该点处是微分同胚.

我们还需要研究微分映射不是同构的情形. 一般的一个微分映射 $df|_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 会将一些方向消没 (表现为这个方向上导数为 0), 并将剩下的一些方向嵌入到像集 $T_{f(p)} N$ 之中. 线性代数的理论告诉我们对任意线性映射 $T : V \rightarrow W$, V 和 W 的维数分别为 n 和 m , 则只要 T 的秩 r 被确定, 就可以选取 V 和 W 的一组基使得在这组基下 T 对应的矩阵为

$$[T] = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^{1 \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times m}.$$

下面的命题告诉我们, 如果在局部上一个微分映射保持**常秩**, 那么上述关于线性代数的命题可以被显现在局部坐标上. (从一点性质变成了局部性质, 但还不是整体性质)

Theorem 1.3.5 (常秩定理). 设 $f : M \rightarrow N$ 是光滑映射. 若点 $p \in M$ 满足存在其开邻域 U 使得对任意 $q \in U$ 均有微分映射 $df|_q$ 的秩为 r , 那么存在 p 和 $f(p)$ 附近的坐标卡 $\phi : U \rightarrow V$ 和 $\phi' : U' \rightarrow V'$ 满足 $f(U) \subset U'$, 并使得

$$\phi' \circ f \circ \phi^{-1} : V \rightarrow V', \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

需要指出的是, 之前关于反函数定理的论述可以实现为常秩定理的特殊情形. 这是因为 $df|_p$ 的非奇异性性质是具有**稳定性的**. 简单来说, 我们为 $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ 视为 n^2 维欧氏空间, 赋予拓扑结构, 然后选取 p 附近的一组局部坐标, 可以证明 $df|_* : p \mapsto df|_p$ 是连续函数. 又因为判断非奇异性的函数 $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 于是 $(df|_*)^{-1} \circ \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ 是 U 上的开集, 所以 p 处的非奇异性可推出 p 附近微分映射的非奇异性. 与之类似地, 对长方形矩阵 $A \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$, “ $\text{rk } A = \min\{n, m\}$ ” 也是一个具有稳定性的性质, 这是因为 “是否有一个正方形子阵秩为 $\min\{n, m\}$ ” 是稳定的. 反之对较小的秩显然没有稳定性成立, 事实上满足 “ $\text{rk } A = \min\{n, m\}$ ” 的矩阵在 $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$ 上是**稠密**的, 这也允许我们利用逼近的想法是证明一些线性代数的命题.

常秩定理的证明就是研究 **Jacobi 矩阵** 来分别原像集和像集上更换坐标卡, 比较技术化. 我们关注的重点应在 “为什么单点处的信息不足以完成证明”. 特别地, 我们也可以类比数学分析中隐函数定理的证明以及之后 Sard 定理的证明.

Proof. 显然问题可化归为欧氏情形, 即有开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 与函数 $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 使得在每点处都有 $\text{rk } df|_p = r$. 通过复合一个平移变换, 我们不妨设 $0 \in U$ 以及 $f(0) = 0$, 则只需要在 0 附近选取坐标卡证明结论成立.

首先在 0 处 f 对应的 Jacobi 矩阵为 $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. 由于其秩为 r , 因此上述矩阵存在一个 $r \times r$ 子阵可逆. 通过交换坐标 (是微分同胚), 我们可不妨设左上角的 $r \times r$ 子阵可逆, 即在后 $n - r$ 个坐标固定的情况下 (f_1, \dots, f_r) 关于前 r 个坐标给出局部同胚. 由此我们可以在原像集上选取一个坐标变换:

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_r(x_1, \dots, x_n), x_{r+1}, \dots, x_n)$$

φ 在每点处对应的 Jacobi 矩阵形如:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq r} & * \\ 0 & I_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}$$

因此 φ 在 0 附近给出局部微分同胚, 记为 $\varphi: U_1 \rightarrow V_1$, 其中 $U_1 \subset U$. 设 V_1 上的坐标结构为 (y_1, \dots, y_n) , 则 $f \circ \varphi^{-1}: V_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ 形如

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_r, g_{r+1}(y_1, \dots, y_n), \dots, g_m(y_1, \dots, y_n)).$$

(这里右半边的 y_i 应当视为把 y 打到其第 i 个分量的函数, 和左边的意义不同.) 由于 φ^{-1} 是局部微分同胚, 故对任意 $y \in V_1$ 均有 $\text{rk } d(f \circ \varphi^{-1})|_y = r$, 但是 $f \circ \varphi^{-1}$ 在 y 处的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_{r \times r} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

因此该矩阵的右下角 $(m-r) \times (n-r)$ 矩阵恒零, 即

$$\left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_y = 0, \quad \forall y \in V_1, j = r+1, \dots, n, i = r+1, \dots, m.$$

这即是说, 当 y_1, \dots, y_r 固定时 g_{r+1}, \dots, g_m 和 y_{r+1}, \dots, y_n 的选取无关, 于是它们可看作仅关于 y_1, \dots, y_r 的函数. 而这个依赖关系可以完全在像空间上被体现出来, 因为只要知道一个像的前 r 的分量就能给出整个坐标. 因此, 我们能在 0 附近选取一个坐标变换

$$(z_1, \dots, z_m) \mapsto (z_1, \dots, z_r, z_{r+1} - g_{r+1}(z_1, \dots, z_r), \dots, z_m - g_m(z_1, \dots, z_r))$$

其 Jacobi 矩阵形如

$$\begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ * & I_{m-r \times m-r} \end{pmatrix}$$

于是它在 0 附近给出局部微分同胚. 现在

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_r, 0, \dots, 0).$$

这就给出了满足要求的局部坐标卡, 证毕. \square

接下来我们再考虑 Riemann 面的局部性质. Riemann 面的局部性质要比一般微分流形中强的多: 只要一个解析映射非常值, 那么它的局部性质就能被完全分类.

Proposition 1.3.6 (解析映射的局部性态). 设 $f: X \rightarrow Y$ 是 Riemann 面之间的非常值解析映射. 则对任意 $p \in X$, 存在 p 和 $f(p)$ 附近的复坐标卡 $\phi: U \rightarrow V$ 和 $\phi: U' \rightarrow V'$ 满足 $f(U) \subset U'$, 使得

- $\phi(p) = 0, \phi'(f(p)) = 0$;

- 存在某个 k 使得 $\phi' \circ f \circ \phi : V \rightarrow V', z \mapsto z^k$.

Proof. 还是先把问题化归为 \mathbb{C} 上开集之间的映射: 只需证明对 $0 \in V \subset \mathbb{C}$, 若非常值解析函数 $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ 满足 $f(0) = 0$, 则可以在 0 附近寻找一组坐标卡满足要求.

(这是基于唯一性定理 1.1.22, 整体非常值可推出局部非常值)


现在我们利用幂级数的工具, 设 f 在 0 附近的幂级数展开为

$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots$$

其中 a_k 是最小的非零系数. 因此存在常数项非零的解析函数 g 使得 $f(z) = z^k g(z)$. 根据幂级数的理论, 存在幂级数 h 使得 $h^k = g$, 于是 $f(z) = (zh(z))^k$, 其中 $h(0) \neq 0$.

由于 $(zh(z))' = h(0) \neq 0$, 故 $zh(z)$ 把 0 附近的一个开集 $V_1 \subset V$ 同胚到 0 附近的一个开集 V_2 . 于是我们可以考虑

$$F : V_2 \xrightarrow{(zh(z))^{-1}} V_1 \xrightarrow{f=(zh(z))^k} \mathbb{C}$$

那么就有 $F : z \mapsto z^k$, 证毕. 

特别地, 由于 $\text{Im}[z \mapsto z^k]$ 把 0 附近的开邻域映到 0 附近的开邻域, 因此我们有如下开映射定理:

Corollary 1.3.7 (开映射定理). 设 $f : X \rightarrow Y$ 是 Riemann 面之间的非常值解析映射, 则 f 是开映射.

开映射是一个纯拓扑性质, 我们可以借此一览不同正则性下要使“开映射”性质成立所需要的条件.

(a) 在连续范畴中, 我们有如下区域不变性定理:

Theorem 1.3.8 (区域不变性). 设 U 是 \mathbb{R}^n 中的开集, 则任意嵌入 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的像集 $f(U)$ 是开集.

区域不变性定理的证明是基于高维版本的 Jordan 曲线定理: 对任意 S^k 在 S^n 中的嵌入 f 我们能具体算出同调群 $H_m(S^n - f(S^k))$, 而零维同调群指示连通性, 因此我们可证明任意 S^{n-1} 的嵌入把 S^n 分为两个连通分支, 于是在 \mathbb{R}^n 中也是如此. 因此, 通过研究每个点 $p \in U$ 在 U 中的小开球壳在 \mathbb{R}^n 中嵌入所得像, 我们得到球壳“内部”的整个开集都落在 f 的像中, 这就证明了开性.

从上述证明我们可以看出单性是必要的, 维数相同也是必要的. 因此推广到流形上, 我们只能对相同维数拓扑流形之间的嵌入声明它是开映射.

(b) 在光滑范畴中, 首先如果 f 是局部微分同胚, 那么它显然是开映射. 因此如果某个 $df|_p$ 可逆那么 f 在该点附近为开映射. 与复情形相类比, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ 就不是开映射, 因此该问题需依赖于对光滑结构的考量. 另一方面, 我们刚刚验证了常秩定理, 于是我们可在这一条件下讨论开性质. 注意对欧氏空间之间的嵌入

$$\iota: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

它不是一个开映射，因为每点附近的像是低维数的对象，不可能成为开集（但它显然有意义，我们在之后会定义“光滑流形的子对象”来 classify 这一点）而对欧氏空间之间的投影

$$p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

它就是一个开映射，因为开集在投影下得到开集。因此只要 $df|_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 的秩为 $\dim N$ ，也就是它为**满射**，那么就有 f 在 p 附近为开映射；反之如果它不是满射，那么在 p 附近 f 把它打到一个更低维数的对象，从而不是开映射。如果每点处都有微分映射为满射，那么 f 就是开映射。这样的映射被称为**淹没映射**，我们立即会给它下一个定义，它也是本节后半段研究的重点。

(c) 在复流形中，我们已经看到一维连通复流形之间的非常值映射都是开映射。这和实情形非常不同，因为即使 f 在某点处导数为 0，也不会造成奇异现象出现。而对一般的复流形没有类似的结论成立，我们仍然需要淹没的条件才能谈论开映射。

(d*) 在代数几何中，我们所使用的拓扑——Zariski 拓扑 1.1.26 和通常所说的拓扑是不同的，我们想在多项式环境中给出类似开性的概念——**正则支配映射**。

Definition 1.3.9 (正则支配映射). 称仿射簇之间映射 $\varphi: X \rightarrow Y$ 为**正则映射**，如果它的每个分量都是正则函数，即所谓态射。称 X 为**支配映射**，如果 $\varphi(X)$ 在 Y 中 Zariski 稠密。

通常来说，正则支配映射加上一些技术性条件就能得到开映射性质，这便是基本开性原理：

Theorem 1.3.10 (基本开性原理). 令 $\varphi: Z^r \rightarrow Y^r$ 为相同维数的仿射簇之间的一个正则支配映射，令 $x \in X$ 满足

- $\varphi(x)$ 在 Y 中拓扑是单分歧的；
- $\{x\}$ 是 $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ 的一个分支。

则在经典拓扑中， φ 在 x 点附近是开映射。

该定理代表了正则支配映射在代数——拓扑概念之间转化中的地位。证明它的过程中我们会考虑代数几何版本的 Sard 定理和 Zariski 主定理的证明。

让我们回到 Riemann 面上的讨论。局部性质 1.3.6 中的“ k ”显然具有几何意义。如果在某个局部坐标下 f 形如 $z \mapsto z^k$ ，那么对 $f(p)$ 附近的任意点，它在 p 附近的原像个数恰好为 k 。这一几何性质不随坐标卡选取而改变，因此是映射本身所具有的性质，我们把它称为 f 在 p 处的**重数**，或者说 p 是 $f(p)$ 的一个 k 重根。

如果我们把焦点放在像集上, 就可以发现: 如果某个 $q \in Y$ 含一个 k 重根 $p \in X$, 那么 q 附近的所有点都在 p 附近含有 k 个一重根, 这实际上告诉我们局部上 $\#f^{-1}(q)$ 在计重数的意义下是一个常量. 我们在之后会考虑映射度的概念, 并说明对较好的映射在整体上也有这样的性质成立.

特别地, 我们有如下很强的推论:

Corollary 1.3.11. 设 $f: X \rightarrow Y$ 为 Riemann 面之间的非常值解析映射, 若 f 为集合层面上的单射, 则 f 为 X 到它像集的解析同胚. 如果 f 还是集合层面上的双射, 那么 f 给出 X 和 Y 之间的解析同胚.

Proof. 这是因为此时任意 $q \in Y$ 不存在 $k \geq 2$ 重根: 否则在该点周围的点有 k 个原像, 矛盾. 而当 $k = 1$ 时, 结构定理告诉我们 f 是局部解析同胚. 结合 f 是单射就可知 f 给出整体解析同胚. $\left\{ \frac{1}{1} \right\}$

我们再给出一些复变中经典结果在 Riemann 面上的推广. 它们有很多都基于开映射这个纯拓扑结果 (也说明了其威力).

Corollary 1.3.12 (极大模原理). 设 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 是 Riemann 面上的解析函数, 则 f 无法取到极大模.

Proof. 这是开映射定理 1.3.7 的直接推论, 因为 $f(X)$ 是 \mathbb{C} 上的开集. $\left\{ \frac{1}{1} \right\}$

Proposition 1.3.13 (紧 Riemann 面上的映射). 如果存在 $f: X \rightarrow Y$ 为 Riemann 面之间的非常值解析映射, 其中 X 为紧 Riemann 面, 则 f 一定为满射, 并且 Y 是紧 Riemann 面. 特别地, 紧 Riemann 面上的解析函数只有常值函数.

Proof. 首先根据开映射定理 1.3.7 得到 $f(X)$ 是开集, 又因为紧集在连续映射下的像是紧集, 而 Y 是 Hausdorff 空间, 所以 $f(X)$ 为 Y 上的闭集. 再根据 Y 的连通性以及 $f(X) \neq \emptyset$ 就得到 $f(X) = Y$, 于是 f 是满射并且 Y 是紧 Riemann 面. $\left\{ \frac{1}{1} \right\}$

Theorem 1.3.14 (代数基本定理). 设 $n \geq 1$, 则多项式

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$$

在 \mathbb{C} 上有根.

Proof. 我们构造

$$\tilde{f}: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, z \mapsto \begin{cases} f(z), & z \in \mathbb{C}; \\ \infty, & z = \infty. \end{cases}$$

通过考虑 ∞ 附近的坐标卡, 我们可以验证 f 的确是解析映射:

$$\frac{1}{f(1/z)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z^n}{1 + a_{n-1}z + \cdots + a_0z^n},$$

它在 0 附近有界并趋于 0, 然后由可去奇点定理 1.1.21 即得.

现在利用 1.3.13 可知 \tilde{f} 是满射, 从而存在 $z \in \mathbb{C}$ 使得 $f(z) = 0$, 证毕. $\left\{ \frac{1}{1} \right\}$

Remark. 代数基本定理有非常多的证明. 对拓扑上给出的证明 (当然有非拓扑角度的证明), 我们可以从连续, 光滑, 解析三个角度上分别给出风格并不类似的证明, 也能看出它们各自的风格. 我们在之后会介绍从光滑角度给出的证明. 连续角度的证明概要如下: 如果 $0 \notin \text{im } f$, 考虑由 $f/|f|$ 给出的连续映射 $\mathbb{C} \rightarrow S^1$, 则 \mathbb{C} 中任意圈的像在 S^1 中零伦. 考虑圈 $|z| = R$, 当 R 足够大时 z^n 这一项会给出“主要贡献”, 从而导致 f 形如 $z \mapsto z^n$, 这导致 $|z| = R$ 在 $f/|f|$ 下的像绕 S^1 $n \geq 1$ 圈, 但它并不零伦, 矛盾.

1.3.2 浸入与淹没

回到有关微分流形的讨论, 我们之前已经看到切映射是单射和满射的情形是非常有用的, 为此我们给出如下定义:

Definition 1.3.15 (浸入和淹没). 设 $f: M \rightarrow N$ 是光滑映射.

- 若 $df|_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 是单同态, 则称 f 在 p 处是浸入, 若 f 处处为浸入则称 f 为浸入映射.
- 若 $df|_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 是满同态, 则称 f 在 p 处是淹没, 若 f 处处为淹没则称 f 为淹没映射.

由于一点处的浸入和淹没是稳定性质, 我们通过常秩定理 1.3.5 直接给出下述推论:

Corollary 1.3.16 (浸入/淹没的局部性态). 设 $f: M \rightarrow N$ 是光滑映射, 它在点 p 处是浸入/淹没. 则存在 p 和 $f(p)$ 附近的坐标卡 $\phi: U \rightarrow V$ 和 $\phi': U' \rightarrow V'$ 满足 $f(U) \subset U'$, 使得

$$\phi' \circ f \circ \phi: V \rightarrow V', \begin{cases} (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0), f \text{ 是浸入;} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m), f \text{ 是淹没.} \end{cases}$$

今后我们提到**典范浸入**和**典范淹没**都是指欧氏空间中的上述标准映射.

我们也给出光滑流形的子对象的定义, 一来我们可以更清晰地研究上述性质和在局部和整体上的关系, 二来我们可以严格说明 1.2 节中“嵌入 \mathbb{R}^n 中的流形”的意义, 这是非常重要的, 因为不仅很多流形都本身就是作为 \mathbb{R}^N 的子流形出现, 而且背景空间可以更有助于我们用多元微积分学中的工具对它进行研究.

Definition 1.3.17 (光滑子流形). 设 M 是 n 维光滑流形, S 是 M 的子集. 如果对任意 $p \in S$, 存在 p 在 M 附近的光滑坐标卡 $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ 使得

$$\varphi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{x \in V : x_{k+1} = \dots = x_n = 0\},$$

或者说 $U \cap S = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$, 则称 S 为 M 的**光滑子流形**, $\text{codim } S = n - k$ 称为子流形的**余维数**.

我们可证明上述相容光滑结构诱导 S 成为 k 维光滑流形. 反过来我们也可以说子流形给出一组与底流形相容 (通过典范嵌入) 的坐标卡.

Example 1.3.18 (图像). 我们在例 1.1.5 中说明了一个连续函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的图像 V_f 是 n 维光滑流形, 其拓扑结构为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 的子流形. 我们可证明当 f 是光滑函数时 V_f 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 是通常意义下的光滑子流形. 只需考虑下述坐标卡:

$$\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x, y - f(x)).$$

则首先 φ 为双射, 其次 φ 是光滑映射 (当 f 仅连续时这不成立), 最后 $\varphi(V_f) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$, 这就给出光滑子流形.

我们接下来讨论子流形——整体性质和微分映射——局部性质之间的关系. 首先如果 $S \subset M$ 是子流形, 那么有包含映射 $\iota: S \hookrightarrow M$, 容易验证这是一个光滑映射, 且如果在每点附近取关于子流形的相容坐标卡, 那么在这组坐标卡下 ι 表现为典范浸入. 特别地, 在每点处 $d\iota|_p: T_p S \rightarrow T_p M$ 均为单同态. 因此, 我们可将 $T_p S$ 实现为 $T_p M$ 的子空间. 从几何上来看, 它作为子空间实属自然 (我们其实一开始就做了这件事: 在我们考虑把 M 作为 \mathbb{R}^N 的光滑子流形时, 每点处的切空间都被实现为过这个点的一个超平面, 它实际上就作为 $T_p \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$ 的子空间). 在代数上, 包含映射诱导出限制映射

$$\iota^*: C_p^\infty(M) \rightarrow C_p^\infty(S)$$

于是 S 上的导子都是 M 上的导子. 反过来, 如果一个 M 上的导子 D 满足 $f|_S = g|_S \Rightarrow D(f) = D(g)$, 那么 D 就是 S 上的导子. 这等价于说如果 $f|_S$ (作为函数芽) 为 0, 那么就有 $D(f) = 0$.

根据上面的讨论, 任意光滑子流形都可以实现为一个浸入映射的像集, 反过来我们也可以讨论一个光滑浸入 $f: M \rightarrow N$ 的像集 $f(M)$ 何时成为 N 的光滑子流形.

- 首先根据常秩定理 1.3.5, 对每点 $p \in M$, 存在 p 与 $f(p)$ 附近的坐标卡 $\varphi: U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}$ 以及 $\psi: V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $\psi \circ f \circ \varphi$ 是典范浸入. 也就是说如果把 ψ 作为 N 在 $f(p)$ 处的坐标卡, 那么 $\psi(f(U)) = V' \cap \mathbb{R}^n$, 所以 $f(U)$ 是 N 的光滑子流形.
- 将问题从局部过渡到整体时可能会出现一些问题. 比较容易发现的是所谓**单性**的问题. 如果 f 不是单射, 那么 f 的像可能**甚至不是一个拓扑流形**: 比如让我们考虑

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, F(t) = (2 \cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin 2(t - \frac{\pi}{2}))$$

它的图像是 8 字形, 并且在 $(0,0)$ 处产生自交, 显然不是一个流形. 因此我们应当给 f 加上整体的单射条件.

- 另一个问题是: 就算加上了单射性, 我们也没法完全在**像集空间**中避免某个 $f(U)$ 与远离 U 处点的像之间的影响. 比如还是之前的 8 字型曲线, 但我们把

它的定义域限制在 $(-\pi, \pi)$ 上: 此时 $F: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的确是单射, 但是 $(0, 0)$ 的任意开邻域都会受到 $F(-\pi, -\pi+\varepsilon)$ 和 $F(\pi-\varepsilon, \pi)$ 两段的影响. 但当我们讨论局部性质的时候, 两端的“触角”完全不会出现在考察范围之内. 更本质地说, 我们可以把上述“8”字形赋予由 f 从 \mathbb{R} 继承的余诱导拓扑 (U 为开集当且仅当 $f^{-1}(U)$ 为开集) 使它成为一个光滑流形 (比如在上面的情况中, $F(-\varepsilon, \varepsilon)$ 就是余诱导拓扑下的一个开集, 它不受两端触角的影响) 这和我们一般看到的子空间拓扑是不一样的. 子空间拓扑比余诱导拓扑更粗糙 (开集更少, 分离性更差). 与 Riemann 面的情形 1.3.11 相对比, 开映射的性质保证了上述情况不会发生.

由上述讨论, 我们给出如下定义:

Definition 1.3.19 (浸入子流形). 若 $f: M \rightarrow N$ 是单浸入, 则称 $f(M)$ 为 N 的浸入子流形. 与之对应地, 定义 1.3.17 中的光滑子流形被称为正则子流形.

如果把 $f(M)$ 赋予 N 诱导的子拓扑之后, f 给出 $M \rightarrow f(M)$ 的拓扑同胚, 则称 f 是一个嵌入映射, $f(M)$ 为 N 的嵌入子流形. (即使 M, N 不是流形, 我们也可以讨论余诱导拓扑和像空间的子拓扑之间的关系, 给出嵌入映射的定义, 在考虑一些乘积结构时会用到.)

很明显 f 是嵌入映射当且仅当与诱导拓扑和 N 上的子拓扑等同. 我们将验证这是 $f(M)$ 成为子流形的充要条件.

Theorem 1.3.20. 设 $f: M \rightarrow N$ 是单浸入, 则 $f(M)$ 是 N 的光滑子流形当且仅当 f 是嵌入映射.

Proof. 如果 f 是嵌入映射, 则对任意 $q = f(p) \in N$, 我们已经证明了存在 p, q 附近的坐标卡 $\varphi: U \rightarrow U'$ 和 $\psi: V \rightarrow V'$ 使得 $\psi(f(U)) = V' \cap \mathbb{R}^n$. 但这未必给出 $\psi(f(M) \cap V) = V' \cap \mathbb{R}^n$. 然而根据 f 是嵌入映射, 我们知道 $f(U)$ 在 $f(M)$ 被赋予 N 的子流形拓扑下是开集. 于是存在开集 $V_1 \subset V$ 使得 $V_1 \cap f(M) = f(U)$, 而 $\psi(V_1 \cap f(M)) = \psi(V_1) \cap \mathbb{R}^n$. 这就给出了 q 附近的子流形坐标卡.

反之, 如果 $f(M)$ 是 N 的正则子流形, 我们只需证明对任意开集 $U \subset M$, $f(U)$ 是 N 中一个开集与 $f(M)$ 的交集. 只需证明对每点 $q = f(p) \in f(U)$, 存在它在 N 中的开邻域 V 使得 $V \cap f(M) \subset f(U)$. 这是容易的: 我们只要取一组子流形坐标卡在 q 附近把 $f(M)$ 化为水平集, 然后取 $\psi(q)$ 附近小开球的原像即可. \square

不过下面的命题给了我们一个容易的判别准则, 回忆一个映射被称为常态映射 (proper, 逆紧), 如果任意紧集的原像都是紧集. 从紧空间到 Hausdorff 空间的任意映射都是常态映射, 所以从紧流形到光滑流形的任意映射都是常态映射.

Proposition 1.3.21 (常态+单浸入=嵌入). 若 $f: M \rightarrow N$ 是常态的单浸入, 则 f 是嵌入映射, $f(M)$ 是 N 中的正则子流形. 特别地, 从紧流形到光滑流形的任意单浸入都给出嵌入.

Proof. 只需在点集拓扑的意义下考虑 $f : M \rightarrow f(M)$, 我们证明 f 是闭映射. 对任意闭集 $A \subset M$, 我们证明 $f(A) \subset f(M)$ 是闭集. 根据 $f(M)$ 的第二可数性, 只需证明对任意 $\{y_n\} \subset f(A)$, $y_n \rightarrow y$ 均有 $y \in f(A)$. 则 $\{y_n\} \cup \{y\}$ 是 $f(M)$ 中的紧集, 根据逆紧性, 它在 M 中的原像 $\{x_n\} \cup \{x\}$ 是紧集. 根据紧等价于列紧可知 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_i}\}$, 且 $f(x_{n_i}) \rightarrow y$, 于是 $x_{n_i} \rightarrow x \in A$, 这基于 A 的闭性得到. 于是 $y \in f(A)$, $f(A)$ 是闭集. \square

与浸入的像相对应地, 淹没映射的原像集也可以作为原像的光滑子流形出现. 我们将会看到, 相比浸入子流形它的性态会更好, 从而广泛地被利用于光滑子流形的判定中. 我们首先回忆数学分析中隐函数定理的表述:

Theorem 1.3.22 (欧氏空间隐函数定理). 设 $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 满足 $f(x_0, y_0) = c$. 如果 $df|_{(x_0, y_0)}$ 在第二个分量上诱导出一个 $T_{y_0}\mathbb{R}^m \rightarrow T_c\mathbb{R}^m$ 的双射, 那么存在 (x_0, y_0) 的邻域 U 及光滑映射 $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 使得在 U 上,

$$f(x, y) = c \Leftrightarrow \Phi(x) = y.$$

我们用流形的语言将其重述. 隐函数定理实际上研究的就是整个原像集 $f^{-1}(c)$ 在某个 $p = (x_0, y_0) \in f^{-1}(c)$ 处的局部性态. 由于 Φ 是光滑映射, 因此局部上 $U \cap f^{-1}(c)$ 可看作一个光滑映射的图像, 所以向第一个分量上的投影映射 $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在 $U \cap f^{-1}(c)$ 上的限制给出了 p 处的局部坐标卡.

进一步地, 我们可以在每点处选择不同的“投影映射”. 也就是说: 我们先不取定原空间的典范分拆, 将 f 视为 $\mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的光滑映射. 那么只要 $df|_p : T_p\mathbb{R}^{n+m} \rightarrow T_c\mathbb{R}^m$ 是满射, 那么 $\text{Jac}_p f$ 作为一个 $m \times (n+m)$ 矩阵, 存在一个满秩的 $m \times m$ 子阵. 现在我们能将 \mathbb{R}^{n+m} 分解为 $\mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_p^m$, 使得 $df|_p$ 在第二个直积分量上诱导出双射, 这样同样可以得到 $f^{-1}(c)$ 在 p 处的一个局部坐标卡. 于是, 隐函数定理可以总结为下述命题:

Theorem 1.3.23 (隐函数定理). 设 $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 满足对任意 $p \in f^{-1}(c)$, f 在 p 处是淹没. 则 $f^{-1}(c)$ 是 \mathbb{R}^{n+m} 的子流形, 且 $\text{codim } f^{-1}(c) = n$.

事实上隐函数定理的证明思想已经被总结在反函数定理和常秩定理 1.3.5 的证明中了, 利用常秩定理, 我们可以容易证明下面的正则水平集定理, 即流形版本的反函数定理:

Theorem 1.3.24 (常秩/正则水平集定理). 设 $f : M \rightarrow N$ 是光滑映射, 若 $q \in N$ 满足在 $f^{-1}(q)$ 的一个邻域内恒有微分映射 df 的秩为 r , 那么水平集 $f^{-1}(q)$ 是余维数为 r 的光滑子流形.

特别地, 若 f 在整个 $f^{-1}(q)$ 上是淹没映射, 则 $f^{-1}(q)$ 是余维数为 $\dim N$ 的光滑子流形.

Example 1.3.25 (还是球面). 考虑 $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = |x|$. 则对任意 $x \neq 0$,

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_x = \frac{x_i}{\sqrt{x_0^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_i}{|x|},$$

于是存在某个 i 使得 $\partial_{x_i} F(x) \neq 0$, 此时 $dF|_x: T_p \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow T_{F(p)} \mathbb{R}$ 是满射. 所以对任意 $c \neq 0$, $F^{-1}(c)$ 都是 \mathbb{R}^{n+1} 的子流形, 特别地 S^n 是 \mathbb{R}^{n+1} 的光滑子流形.

类似的例子还能举出很多很多.

鉴于其重要意义, 我们将其总结为下述定义:

Definition 1.3.26 (正则/临界点, 正则/临界值). 设 $f: M \rightarrow N$ 是光滑映射, $p \in M$, $q \in N$.

- 若 $df|_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 是满射, 则称 p 是**正则点**, 否则称 p 为**临界点**.
- 若对任意 $p \in f^{-1}(q)$, p 都是正则点, 则称 q 是**正则值**, 否则称 q 是**临界值**.

则有关原像集的性质可总结为一句话: **正则值的原像是光滑子流形**. 如果再考虑我们在下一节会引入的 **Sard 定理**: 它告诉我们 N 中的临界值非常少, 几乎所有值都是正则值. 我们暂时不引入定理的具体描述, 而在 1.4.1 节中将与它有关的问题都说清楚. 我们立即能得到很多光滑子流形.

隐函数定理以及常秩/正则水平集定理在复流形和代数几何中也有对应物. 首先在复流形上, 隐函数定理和常秩水平集定理的描述和微分情形几乎完全一致:

Theorem 1.3.27 (全纯隐函数定理). 设 $U \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ 是开集, $f: U \rightarrow \mathbb{C}^m$ 是全纯映射. 假设在点 $(z_0, w_0) \in U$ 处满足:

- (1) $f(z_0, w_0) = 0$;
- (2) 关于 w 的复雅可比矩阵

$$J_{f,w}(z_0, w_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(z_0, w_0) \right)_{1 \leq i, j \leq m}$$

是可逆的.

则存在 z_0 的邻域 $V \subset \mathbb{C}^n$ 和唯一的全纯映射 $g: V \rightarrow \mathbb{C}^m$, 使得 $g(z_0) = w_0$ 且

$$f(z, g(z)) = 0 \quad \text{对所有 } z \in V \text{ 成立.}$$

Theorem 1.3.28 (全纯常秩水平集定理). 设 $f: M \rightarrow N$ 是复流形之间的全纯映射. 若 $q \in N$ 满足在 $f^{-1}(q)$ 的一个邻域内恒有复微分映射 df 的秩为 r , 那么水平集 $f^{-1}(q)$ 是余维数为 r 的复子流形.

特别地, 若 f 在整个 $f^{-1}(q)$ 上是淹没映射, 则 $f^{-1}(q)$ 是余维数为 $\dim N$ 的复子流形.

而在代数几何中, 我们有下列所谓形式隐函数定理:

Theorem 1.3.29 (形式隐函数定理). 设 k 为特征零的代数闭域, 考虑形式幂级数环 $A = k[[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]] = k[[\mathbf{x}, \mathbf{y}]]$. 设 $F = (F_1, \dots, F_m) \in A^m$ 满足:

(1) $F(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

(2) 关于 \mathbf{y} 的形式雅可比矩阵

$$J_{F, \mathbf{y}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \right)_{1 \leq i, j \leq m} \in \text{Mat}_{m \times m}(k)$$

是可逆的 (即 $\det J_{F, \mathbf{y}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \neq 0$) .

则存在唯一的 m -元形式幂级数 $G = (G_1, \dots, G_m) \in k[[\mathbf{x}]]^m$ 满足:

- $G(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

- 对所有 \mathbf{x} 在形式邻域内,

$$F(\mathbf{x}, G(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

在 $k[[\mathbf{x}]]$ 中成立.

等价地, 完备局部环的商 $k[[\mathbf{x}, \mathbf{y}]]/(F_1, \dots, F_m)$ 作为 $k[[\mathbf{x}]]$ -代数同构于 $k[[\mathbf{x}]]$.

在仿射簇上我们可以研究任何点处的原像集, 或者称之为**纤维**. 首先对一个态射我们可类似定义正则点, 正则值的概念. 此时我们有:

Theorem 1.3.30. 设 k 是一个特征零的代数闭域, $f : X \rightarrow Y$ 是一个正则支配映射. 则任意正则值 q 的水平集是一个 X 中的光滑子簇, 其余维数为 $\dim Y$.

在代数几何中我们还能讨论临界值和非闭点的原像集. 正则值对应的纤维维数是所有可能出现的维数下界, 即

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - \dim Y.$$

我们还能给出一个上界, 任意闭点的纤维维数不会超过 X 的整体维数.

$$\dim f^{-1}(y) \leq \dim X.$$

我们也可以研究不同点处纤维维数的变化, 它们被所谓上半连续性定理所控制.

Theorem 1.3.31 (上半连续性定理). 设 $f : X \rightarrow Y$ 是有限型态射, 则函数 $y \mapsto \dim f^{-1}(y)$ 是**上半连续**的. 即对于任意整数 k , 集合

$$\{y \in Y : \dim f^{-1}(y) \geq k\}$$

是 Y 中的闭子集.

1.3.3 正则值的原像集：映射度理论

我们之前已经说明了正则值的原像集是子流形. 特别地, 当 $\dim M = \dim N$ 时正则值的原像是 0 维子流形, 它只可能是 M 中的离散点集. 对任意 $p \in f^{-1}(q)$, f 在 p 附近给出局部微分同胚. 更进一步地, 如果 f 是常态映射, 那么 $\#f^{-1}(q)$ 是有限集, 并且存在开邻域 $q \in U_q$ 和每个 $p \in f^{-1}(q)$ 的开邻域 V_p 使得对每个 p , f 都给出 V_p 到 U_q 的同胚. 这意味着 $\#f^{-1}(q)$ 是一个局部常值函数.

然而即便如此, $\#f^{-1}(q)$ 并不是一个仅关于映射 f 的值. 我们有如下例子:

Example 1.3.32. 考虑一个光滑映射 $f: S^1 \rightarrow S^1$, 将两个圈均使用 $[0, 1]$ 参数化, 0 和 1 代表同一点. 考虑如下定义的 f :

$$0 \xrightarrow{[0, \frac{1}{4}]} \frac{1}{2} \xrightarrow{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]} 0 \xrightarrow{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]} \frac{1}{2} \xrightarrow{[\frac{3}{4}, 1]} 1$$

比如说在 $[0, \frac{1}{4}]$ 这段时间里 $f(t)$ 从 0 匀速移动到 $\frac{1}{2}$. 则 $[0, \frac{1}{2}]$ 这段被来回走了 3 次但 $[\frac{1}{2}, 1]$ 这段只被走了一次. 虽然目前 f 不是光滑映射, 但我们可容易地将其用一个光滑映射逼近使得只在边界上稍作修改, 这导致 $(\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon)$ 仍然被走了 3 次而 $(\frac{1}{2} + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$ 只被走了 1 次, 并且这些值显然都是正则值, 我们就有

$$3 = \#f^{-1}(\frac{1}{4}) \neq \#f^{-1}(\frac{3}{4}) = 1.$$

从临界值的分布来看, 在 0 附近和 $\frac{1}{2}$ 附近会产生两个临界值, 它们把圆周分成了不连通的两个正则值分支, 所以即使 $\#f^{-1}(y)$ 是局部常值函数它也并不在所有正则值上取值相同.

类似的方法我们可以让 f 来回走过 $[0, \frac{1}{2}]$ 奇数次并最后沿 $[\frac{1}{2}, 1]$ 走回原点, 我们能清楚看到该命题如何修复: 要么我们把“来”和“回”两个方向上经过某点的权重分别记作 +1 和 -1, 然后把 $\#f^{-1}(y)$ 定义为带权重的求和, 但这显然会导向可定向性的讨论; 要么我们就直接论证 $\#f^{-1}(y)$ 的奇偶性作为不变量. 这一现象呼应于我们在定向一节 1.2.2 最后关于流形的 \mathbb{Z} -定向和 \mathbb{Z}_2 -定向可定义性的讨论.

而对 Riemann 面来说, 我们之前所研究的局部性质就能保证上面的事情不会发生, 因此我们接下来先在 Riemann 面上考察映射度的定义.

根据开映射定理 1.3.7 和关于原像集离散的结论 1.1.23, 映射的像与原像已经被研究地很清楚了. 我们关心的对象并不和微分流形完全一样: 根据局部性质 1.3.6, 如果 f 在 p 附近形如 $z \mapsto z$, 那么 f 形如局部同胚; 而如果 f 在 p 附近形如 $z \mapsto z^k (k \geq 2)$, 那么在该小邻域中去掉 p 点后, $z \mapsto z^k$ 给出一个 $\mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ 的覆叠映射, 特别地也是局部同胚. 因此在 Riemann 面中, 这些造成分歧的点则是所谓的“奇异点”, 相应的它的像是所谓奇异值. 为了研究 Riemann 面之间映射, 我们可以通过去掉奇异值及其原像以得到一个局部同胚映射, 然后再尝试把它延拓

到整个 Riemann 面上. 由于我们本质上只在 2 维实空间上去掉了一个离散集, 所以这样的复原过程只需局部进行, 而这是容易的.

我们先给出一些相关定义:

Definition 1.3.33 (分歧点, 奇异值). 设 $p: X \rightarrow Y$ 是 Riemann 面之间的非常值解析映射. 称 $y \in Y$ 是一个 (关于 p 的) **分歧点**, 如果在 y 的任意邻域 V 上, $p|_V$ 都不是单映射. 如果 p 有分歧点则称其为**分歧解析映射**, 否则称为**非分歧解析映射**.

全体分歧点的像被称为**奇异值**. (我们可以把非奇异值叫做)

我们先研究非分歧的解析映射, 此时该映射一定是一个局部同胚. 下面简单但重要的命题允许我们安心地将覆叠空间相关命题搬到 Riemann 面的研究中而不会越出 Riemann 面的范畴.

Proposition 1.3.34 (局部同胚继承复结构). 若 $f: X \rightarrow Y$ 是从第二可数 Hausdorff 空间到 Riemann 面的局部同胚, 则 X 也是 Riemann 面. 特别地, Y 的所有覆叠空间都是 Riemann 面. (我们可以想见流形的良好局部性质能满足 (万有) 覆叠空间存在的各种需求.)

Proof. 局部同胚性允许我们在每点附近通过拉回作用找到一个复图卡, 相容性是因为两个图卡的相交结构也直接被同胚到由 Y 中, 由 Y 中图卡的相容性所保证. $\left\{ \begin{smallmatrix} \circ \\ \cup \\ \cap \\ \circ \end{smallmatrix} \right\}$

同时, 拓扑范畴中的映射提升也可以直接是解析的:

Proposition 1.3.35 (解析的提升也是解析的). 设 X, Y, Z 是 Riemann 面, 其中 $p: Y \rightarrow X$ 是非分歧解析映射. 设 $f: Z \rightarrow X$ 解析映射, 它的一个提升是 $\tilde{f}: Z \rightarrow Y$. 则 \tilde{f} 也是解析映射.

特别地, 对给定的 Riemann 面 X , 它的任意两个覆叠空间之间的覆叠变换都是解析映射.

Proof. 这是直接利用局部同胚继承复结构所得的结果. $\left\{ \begin{smallmatrix} \circ \\ \cup \\ \cap \\ \circ \end{smallmatrix} \right\}$

借助上面两个命题, 我们得到:

Proposition 1.3.36 (万有覆叠存在性). 设 X 是 Riemann 面, 则存在一个单连通 Riemann 面 \tilde{X} 及覆叠映射 $p: \tilde{X} \rightarrow X$, 并且在保基点解析同胚的意义下唯一. 从而对任意 $G < \pi_1(X)$, 存在一个 X 的覆叠 Y 是 Riemann 面并且满足 $\pi_1(Y) \cong G$.

Proof. 回忆在覆叠空间理论中, 一个拓扑空间万有覆叠的存在性是基于道路连通, 局部道路连通, 半局部单连通性. 后两者完全被拓扑流形所具有的局部欧氏性质所满足.

之后的建构由覆叠理论中的 Galois 理论所保证, 上两个命题保证了覆叠空间都是 Riemann 面, 覆叠映射和覆叠变换都是解析映射, 因此作为拓扑空间的同胚意义下的唯一性可直接导向解析同胚意义下的唯一性. $\left\{ \begin{smallmatrix} \circ \\ \cup \\ \cap \\ \circ \end{smallmatrix} \right\}$

反过来, 复变可给覆叠空间理论提供充足的例子.

Example 1.3.37 (对数映射). 我们知道函数 $\log : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个多值函数, 当选定任意一个基点 $z_0 \in \mathbb{C}^*$, 然后选取某个 $f(z_0) \in \log z_0$ 时, f 可唯一扩张为 \log 的一个解析分支.

我们可以用覆叠空间的语言来重述这件事: 首先我们可验证 $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ 是一个解析的覆叠映射, 于是对任意 $f : X \rightarrow \mathbb{C}^*$, 如果 X 是单连通的, 那么当选定某个 $w_0 \in \exp^{-1}(z_0)$ 时, f 可唯一提升为一个 $X \rightarrow \mathbb{C}$ 的映射, 满足下述交换图表考虑下述交换图表

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow \log f & \downarrow \exp \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

这就被称为 $\log f$ 的一个解析分支. 我们可以把 \exp 映射的覆叠变换群研究清楚: 设 $\tau_n : z \mapsto z + 2\pi i n$ 是虚轴方向的提升作用, 则

$$\text{Deck}(\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*) = \{\tau_n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}.$$

特别地这给出 $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$.

为了得到道路提升以及映射提升性质, 光有局部同胚性是不够的. 一方面, 局部同胚性不能保证满性, 另一方面没法在纤维上给出同胚的一致性. 然而, 之前所定义的常態映射能直接保证覆叠性质成立:

Proposition 1.3.38. 设 $p : X \rightarrow Y$ 是局部紧拓扑空间之间的常態局部同胚, 则 p 是覆叠映射.

特别地, 如果 p 是 Riemann 面之间的非常值常態非分歧解析映射, 则上述所有条件自动满足, p 一定是覆叠映射.

Proof. 首先对任意 $y \in Y$, 根据常態映射的性质 $p^{-1}(y)$ 是非空有限集. 因此我们可为每个 $x_i \in p^{-1}(y)$ 选取一个开邻域 U_i 使得 $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V_i$ 是同胚, 根据同胚性可知这些 U_i 互不相交. 由于局部紧空间之间的常態映射 p 是闭映射, 因此 $p(X - \bigcup U_i)$ 是闭集, 取 $V = (Y - p(X - \bigcup U_i)) \cap \bigcap_i V_i$ 为开集, 则一方面 $y \in V$, 另一方面 $p^{-1}(V) \subset \bigcup U_i$. (这条性质是必要的: 即 y 附近点不能有远离 $f^{-1}(y)$ 的原像, 而这需要借助闭映射相关性质才会成立, 不能简单地取 $V = \bigcap V_i$.) 所以

$$p^{-1}(V) = \bigcup_i p^{-1}(V) \cap U_i;$$

并且根据 $p|_{U_i}$ 给出同胚可知:

$$f|_{p^{-1}(V) \cap U_i} : p^{-1}(V) \cap U_i \rightarrow V \subset V_i \text{ 是同胚.}$$

因此 p 是覆叠映射, 证毕.



原像集 $f^{-1}(y)$ 在覆叠空间中对应所谓叶数的概念: 覆叠空间中关于基点变换所给出的道路提升的性质告诉我们对任意 $y, y' \in Y$ 均有 $\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y')$. 从而, 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是非常值的常态非分歧解析映射, 那么我们可以良定义 $\deg f$ 为任意一个 $y \in Y$ 的原像集的大小. 对一般的非常值常态解析映射 $f: X \rightarrow Y$, 我们就可以借此来定义映射度.

Definition 1.3.39 (Riemann 面: 映射度). 设 $f: X \rightarrow Y$ 是非常值常态解析映射, $\text{Crit } f$ 为 f 的全体奇异值构成的集合. 记 $X' = X/f^{-1}(\text{Crit } f)$, $Y' = Y/\text{Crit } f$. 则 $f|_{X'}: X' \rightarrow Y'$ 是非分歧的解析映射, 进而是一个覆叠映射, 我们就把这个覆叠映射的叶数 (根据 proper 性它有限) 称作 f 的映射度, 记为 $\deg f$.

对任意 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是一个有限集. 我们在研究局部性态 1.3.6 时定义了重数的概念: 对每个 $x \in f^{-1}(y)$, 如果 f 在 x, y 附近形如 $z \mapsto z^k$ 就称 f 在 x 处的重数为 $m(f, x) = k$. (我们验证了它不依赖于局部坐标的选取) 进而, 对每个像 $y \in Y$ 我们定义其重数为其原像集中全体重数之和.

$$m(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} m(f, x).$$

有时也直接记作 $\#f^{-1}(y)$, 即所谓 $f^{-1}(y)$ 作为可重集的大小.

Theorem 1.3.40. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是非常值常态解析映射, 则总有 $\deg f = \#f^{-1}(y)$ 对任意 $y \in Y$ 成立.

Proof. 这是基于 $\text{Crit } f$ 在 Y 中构成离散集, 而覆叠空间的理论已经保证了 $\deg f = \#f^{-1}(y)$ 对任意 $y \in Y'$ 成立, 于是我们只需在每个奇异值的局部上证明命题成立即可. 设 $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$, 在每个 x_i 附近选择一个坐标卡 U_i 对应 y 附近的坐标卡 V_i , 使得 $U_i \rightarrow V_i$ 形如 $z \mapsto z^k$. 则对任意 $y' \in V_i - \{y\}$ (它总是非奇异点) 均有 y' 在 U_i 中恰有 k 个 (一重) 原像, 根据定义

$$m(f, x_i) = k = m(f|_{U_i}, y').$$

根据 f 是闭映射可知, 存在 y 的一个开邻域 $V \subset \bigcap_i V_i$ 原像落在 $\bigcup U_i$ 中. (我们在 1.3.38 的过程中对此给出过一个证明.) 现在取 $y' \in V - \{y\}$, 则

$$\#f^{-1}(y) = \sum_{i=1}^n m(f, x_i) = \sum_{i=1}^n m(f|_{U_i}, y') = \#f^{-1}(y') = \deg f.$$

证毕. 

特别地, 从紧 Riemann 面到 Riemann 面的任意映射都是常态的, 从而对任意非常值解析映射都可以良定义映射度. 一个在复变函数中非常典范的情形是考虑 Riemann 球面上的解析函数 $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ 或者亚纯函数 $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. 于是我们就重新得到了复变函数中的下述定理: (回忆我们在那里是利用积分方法 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f'/f dz = \#f^{-1}(0)$. 我们将在第二部分去介绍积分方面的想法.)

Corollary 1.3.41. 整函数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的极点个数和零点个数相同.

Proof. $\#f^{-1}(0) = \#f^{-1}(\infty)$ 是定理 1.3.40 的直接推论. \square

特别地, 当 f 是一个多项式时仅有 $f(\infty) = \infty$. 由于 f 在 ∞ 附近坐标卡下的展开形如

$$g = \frac{1}{f(\frac{1}{z})} : z \mapsto \frac{z^n}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + 1}$$

由于分母是常数项为 1 的解析函数, 因此 g 的级数展开最低次项恰好是 z^n , 所以 ∞ 是 f 的 n 阶极点. 从而 $\#f^{-1}(0) = \#f^{-1}(\infty) = n$. 这就重新证明了代数基本定理.

我们关于分歧与非分歧的映射之间的联系再多说几句. 事实上我们有所谓**分歧覆叠**解析映射概念, 它指的就是常态的非常值解析映射. 我们可以把研究覆叠空间的语言 (如覆叠变换群, Galois 扩张) 应用到分歧覆叠上, 这基于如下的一些和延拓有关的命题:

Proposition 1.3.42. 设 Y 是 Riemann 面, $A \subset Y$ 是闭的离散集, 记 $Y' = Y - A$. 则对任意非常值, 非分歧的常态解析映射 $f: X' \rightarrow Y'$, 我们都能找到一个 Riemann 面 X , 一个分歧常态解析映射 $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ 以及一个解析同胚 $\Phi: X - \tilde{f}^{-1}(A) \rightarrow X'$ 使得 $f \circ \Phi = \tilde{f}|_{X - \tilde{f}^{-1}(A)}$.

Proposition 1.3.43. 设 X, Y, Z 是 Riemann 面, $f: X \rightarrow Z$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 分别是常态分歧解析映射, 记 $Z' = Z - \text{Crit } f - \text{Crit } g$, $X' = f^{-1}(Z')$, $Y' = g^{-1}(Z')$. 那么 $f|_{X'}$ 和 $g|_{Y'}$ 都是非分歧解析映射. 则对任意覆叠变换 $\sigma: X' \rightarrow Y'$, 它可唯一延拓为保纤维的变换 $\tilde{\sigma}: X \rightarrow Y$.

特别地, 取 $X = Y$ 我们就可以为任意非常值常态解析映射 $f: X \rightarrow Z$ 良定义它的**覆叠变换群**.

最后, 全纯分歧覆叠的映射度还和 Riemann 面上的**亚纯函数域**这一代数对象相关:

Example 1.3.44. 设 X, Y 是 Riemann 面, $\pi: Y \rightarrow X$ 是 n 重全纯分歧覆叠映射. 对任意 $f \in \mathcal{M}(Y)$, 考虑它对应的**初等对称函数** c_1, c_2, \dots, c_n 如下:

- 先考虑非分歧的情况, 此时 $\pi: Y' \rightarrow X'$ 为 n 重覆叠映射, 设 $\text{Deck}(Y'/X') = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$. 则形式多项式

$$(T - \tau_1 f)(T - \tau_2 f) \cdots (T - \tau_n f)$$

的每项 T^k 之系数都是一个定义在 Y' 上的在所有覆叠变换下不变的亚纯函数, 根据覆叠变换理论它是 X' 上一个亚纯函数 c_k 在 π^* 下的拉回. 它就被称为第 k 个初等对称函数.

- 对一般的分歧覆盖映射, 我们可先通过 $\pi' : Y' \rightarrow X'$ 来在 X' 上定义初等对称函数, 剩下的点都是孤立点. 通过证明对足够大的 N 总有 $z^N c_k$ 在这些点附近有界, 我们可以将其亚纯延拓到整个 X 上.

现在最初的 f 满足

$$f^n + (\pi^* c_1) f^{n-1} + \cdots + (\pi^* x_{n-1}) f + \pi^* c_n = 0. \quad (*)$$

也就是说, 如果把 $\mathcal{M}(X)$ 通过 π^* 的拉回作用域嵌入到 $\mathcal{M}(Y)$ 中, 那么每个 $\mathcal{M}(Y)$ 中元素对应的极小多项式次数至多为 n . 我们可通过代数上的单扩张定理说明这意味着

$$[\mathcal{M}(Y) : \mathcal{M}(X)] \leq n.$$

进一步地, 若 f 对应的极小多项式为

$$f^m + (\pi^* p_1) f^{m-1} + \cdots + \pi^* p_m = 0,$$

对任意 $x \in X$ 将上述关系式取值于每个 $y \in f^{-1}(x)$, 则所有 $f(y)$ 应当满足相同的系式

$$f(y)^m + p_1(x) f(y)^{m-1} + \cdots + p_{m-1}(x) f(y) + p_m(x) = 0.$$


所以 $\{f(y) : y \in f^{-1}(x)\}$ 中至多出现 m 种不同取值.

事实上, 我们总是可以证明存在某个 $f \in \mathcal{M}(Y)$ 及某个 $x \in X$ 使得对 $y \in f^{-1}(x)$, $f(y)$ 的取值两两不同. 这就说明了 f 对应的极小多项式次数只能为 n , 从而只能是 (*). 这其实就说明了:

$$[\mathcal{M}(Y) : \mathcal{M}(X)] = n = \deg f.$$

接下来回到微分拓扑中对映射度的讨论. 我们可能会用到 1.4.1 节对 Sard 定理的具体描述和 1.4.4 节对带边流形的讨论, 理论上这部分内容将承接 1.4.4 节. 首先我们把本节开头的讨论总结为下述命题:

Proposition 1.3.45. 设 $f : M \rightarrow N$ 是相同维数光滑流形之间的常态光滑映射, 则 $\#f^{-1}(y)$ 是定义在 N 中全体正则值集合 (一个稠密开集) 上的局部常值函数.

Proof. 证明和 1.3.38 中完全类似, 我们就是运用常态映射所带来的闭映射拓扑性质来给出证明. 

Sard 定理的称述中, 临界值构成一个零测集, 但绝不一定是有限集, 离散集或者可数集. 例 1.3.32 中就说明了这可能导致整体常值性不成立. 不过也可以来看一个局部常值性能推出整体常值性的例子, 重新证明代数基本定理 1.3.14:

Proof for 1.3.14. 类似当时的证明, 我们把 $f = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ 延拓为球面之间的光滑映射. 我们选择两个典范的关于南极点 $(0, 0, -1)$ 和北极点 $(0, 0, 1)$ 球极投影

$$\phi_N : S^2 - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_S : S^2 - \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

并定义

$$\tilde{f} : S^2 \rightarrow S^2, \quad \tilde{f}(p) = \begin{cases} \phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_N(p), & p \neq (0, 0, 1); \\ (0, 0, 1), & p = (0, 0, 1). \end{cases}$$

通过球极投影的具体表达式, 我们可以在 ϕ_S 对应的坐标卡上验证 \tilde{f} 给出光滑映射, 从而 \tilde{f} 是球面之间的光滑映射, 根据球面的紧性它显然是常态映射.

现在考虑 \tilde{f} 的临界点: $p \neq (0, 0, 1)$ 是临界点当且仅当多项式 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 在 $\phi_N(p)$ 处的微分映射退化, 这等价于 $f'(\phi_N(p)) = 0$. 而由于 $n \geq 1$, 故多项式 f' 的零点个数不超过 $n - 1$. 从而至多再算上 $(0, 0, 1)$, \tilde{f} 在 S^2 上的临界点构成有限集, 于是临界值也构成有限集.

而我们已经说明了在正则值集合上定义的 $\#f^{-1}(y)$ 是局部常值函数, 又因为 S^2 去掉有限个点后得到连通集, 于是所有正则值上原像个数一致. 如果这个值为 0, 那么 f 的像集是离散集, 根据连续性 f 只能是常值函数, 这不可能.

所以 \tilde{f} 的像集包含了所有正则值, 进而也包含了 S^2 中除了一个有限集外的所有点. 由于像集 $\tilde{f}(S^2)$ 为闭集, 它应当包含所有点. 特别地, 多项式 f 存在零点. \square

对一般的光滑流形, 我们先来考虑 mod 2 映射度的良定义性, 我们考虑的命题也和一般的映射度定义相关. 为此需要先引入一些拓扑概念:

Definition 1.3.46 (光滑同伦和光滑同痕). 称 $f, g : M \rightarrow N$ 光滑同伦, 如果存在从带边流形到 Y 的光滑映射 $F : M \times [0, 1] \rightarrow Y$ 使得

$$F(*, 0) = f, \quad F(*, 1) = g.$$

F 被称为 f 和 g 之间的光滑同伦, 记作 $F : f \simeq g$. 我们也经常将同伦用一族映射 $\{F_t\}_{t \in [0, 1]}$ 的记号表示, 此时有 $F_0 = f$ 以及 $F_1 = g$. 如果每个 F_t 都给出 $X \rightarrow Y$ 的微分同胚, 那么称 f 和 g 是光滑同痕的. 我们经常对一个光滑流形 M 讨论其光滑自同痕.

Remark. 我们会在 1.4.2 章最后讨论纽结时回到对同痕概念的研究.

接下来的证明大致分为如下两步:

- 先证明 $\#f^{-1}(y) \bmod 2$ 是光滑同伦不变量, 即对 $f_1 \simeq f_2 : M \rightarrow N$ 和正则值 y 总有 $\#f_1^{-1}(y) = \#f_2^{-1}(y) \bmod 2$.

- 然后证明存在一个 N 上光滑同痕于恒等映射的自同胚 Φ 将 N 上任意某点 y 送到另一点 z , 从而对任意光滑映射有 $\Phi \circ f \simeq f$, 则

$$\#f^{-1}(z) = \#(\Phi \circ f)^{-1}(z) = \#f^{-1}(y) \bmod 2.$$

Remark. 我们在证明中会看到要求光滑同痕性而不只是光滑同伦的重要性.

Lemma 1.3.47. 设 $f, g: M \rightarrow N$ 是相同维数光滑流形之间的常态光滑映射. 若 f 与 g 光滑同伦且存在 $F: f \simeq g$ 也是常态映射, 则对任意 f 与 g 的公共正则值 y 均有

$$\#f^{-1}(y) = \#g^{-1}(y) \bmod 2.$$

Proof. 我们可将其证明与后文的命题 1.4.39 作对比. 考虑常态映射 $F: M \times [0, 1] \rightarrow N$ 使得 $F_0 = f$ 且 $F_1 = g$. 如果 y 是 F 的正则值, 那么根据带边流形正则水平集定理 1.4.38, $F^{-1}(y)$ 是 $M \times [0, 1]$ 中的带边 1 维子流形. 根据常态性可知该子流形是紧的. 于是其边界上恰好含有偶数个点. 所以

$$\begin{aligned} 0 &= \#\partial F^{-1}(y) = \#F^{-1}(y) \cap \partial(M \times [0, 1]) = \#F^{-1}(y) \cap (M_0 \amalg M_1) \\ &= \#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y), \bmod 2. \end{aligned}$$

这就说明了 $\#f^{-1}(y) = \#g^{-1}(y), \bmod 2$. 如果 y 不是 F 的正则值, 由于 f 和 g 的公共正则值在 N 上构成开集, 因此在 y 附近存在一个公共正则值开邻域. 但 F 在 N 上几乎处处是正则值, 所以可在该开邻域上拣取 F 的一个正则值 y' . 根据局部常值性 1.3.45, 我们就得到对任何公共正则值 y 都有

$$\#f^{-1}(y) = \#f^{-1}(y') = \#g^{-1}(y') = \#g^{-1}(y), \bmod 2.$$



Remark. 如果要求 M 为紧流形则 $M \times [0, 1]$ 也是紧流形, 从而可以自动去掉所有关于常态的假设.

Lemma 1.3.48 (齐性引理). 对光滑流形 M 上任意两点 y, z , 存在一个光滑同痕于恒等映射的自同胚 Φ 把 y 送到 z . 如果允许 M 带边, 那么要求 y 和 z 是内点.

Proof. 证明利用到光滑向量场的性质. 我们首先证明在欧氏空间 \mathbb{R}^n 中存在一个光滑同痕与恒等映射的自同胚 Φ 把原点送到单位球内部任意一点, 且保持单位球外部不动. 我们希望选取定义在 \mathbb{R}^n 上但支在 D^n 上的光滑向量场. 为此考虑光滑截断函数 ϕ 满足

$$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \begin{cases} \phi(x) > 0, & 0 \leq |x| < 1; \\ \phi(x) = 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

设由原点指向我们想到达的点 p 方向的单位向量为 \mathbf{v} , 我们选取一个光滑向量场 T 满足 $T(x) = \phi(x) \cdot \mathbf{v}$. 由此我们可讨论任何点在该向量场作用下运动形成的轨迹, 我们发现原点在该向量场作用下会朝着我们想到达点的方向前进, 有限时间内能到达该方向上单位圆盘内的任意点 p .

现在我们设 $\varphi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 将 x 送到它沿向量场运动 t 时间后所得的像, 则我们有:

- $\varphi_0 = \text{id}$, 存在某个 φ_{t_0} 把 0 送到我们想要的 p ;
- 所有 φ_t 都保单位球面上及之外的点不动;
- 所有 φ_t 都是 \mathbb{R}^n 上的自同胚, 并且 $\{\varphi_t\}$ 把 φ_0 光滑同痕到 φ_{t_0} .

这就证明了局部命题. 在一般的光滑流形上, 我们声称如果定义

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{存在光滑同痕与恒等映射的自同胚 } \Phi \text{ 使得 } \Phi(x) = y,$$

那么 \sim 成为一个等价关系. 其中自反性显然.

- 对称性: 若有光滑同痕 $h_t: M \rightarrow M$ 使得 $h_0 = \text{id}$ 且 $h_1(x) = y$, 则 $\{h_t^{-1}\}$ 也是一族光滑同痕, 并且 $h_0^{-1} = \text{id}$ 且 $h_1^{-1}(y) = x$. 从而有 $y \sim x$.
- 传递性: 若有 $h_t, h'_t: M \rightarrow M$ 使得 $h_0 = h'_0 = \text{id}$ 且 $h_1(x) = y, h'_1(y) = z$, 那么 $\{h'_t \circ h_t\}$ 也是一个光滑同痕, 初始有 $h'_0 \circ h_0(x) = x$, 最终 $h'_1 \circ h_1(x) = z$. 于是 $\{h_t\}$ 和 $\{h'_t \circ h_t\}$ 合起来给出一个光滑同伦, 并最终把 x 送到 z , 于是我们有 $x \sim z$.

现在由于每个 x 都存在一个同胚于 \mathbb{R}^n 的开邻域, 因此 x 总是和它附近的点在一个等价类中. 根据连通性论证, 我们容易得到所有点都应当在同一个等价类中, 证毕. \square

Remark. 根据命题中的论证, 在将某个确定的 x 送到 y 时, 我们可以保证光滑同痕只在某条连接 x, y 之间线段的紧邻域上非平凡. 这就导致整个 $h: M \times [0, 1] \rightarrow M$ 是常态映射, 因为每个紧集的原像是某个紧集 $\times [0, 1]$ 和一个紧集内闭集之并, 从而满足逆紧性. 这就允许我们使用引理 1.3.47 给出下述定义.

Definition 1.3.49 (模 2 映射度). 设 $f: M \rightarrow N$ 是相同维数光滑流形之间的常态光滑映射. 则对任意两个正则值 $y, z \in N$ 都有

$$\#f^{-1}(y) \equiv \#f^{-1}(z) \pmod{2}.$$

从而这个量只和映射 f 本身的性质有关, 他被称之为 f 的**模 2 映射度**, 记作 $\deg_2 f$.

从证明过程我们也可看出, 如果两个常态光滑映射是光滑同伦的, 那么它们的模 2 映射度相同. 作为推论, 球面 S^{n-1} 上的恒等映射模 2 映射度为 1, 常值映射映射度

为 0, 从而它们不光滑同伦. 这就重新证明了 Brouwer 不动点定理的等价命题 1.4.42 中的 (3).

将映射度推广到 \mathbb{Z} 值需要可定向的概念. 回顾上面的证明, 在引理 1.3.47 的证明中我们粗糙地给出了

$$0 = \#F^{-1}(y) = \#f^{-1}(y) + \#g^{-1}(y), \quad \text{mod } 2.$$

但实际上一维流形可以容易地被赋予方向, 比如当一条线段从 $M \times \{0\}$ 绕一圈回到 $M \times \{0\}$ 时, 它恰好贡献了一次“离开” $M \times \{0\}$ 和一次“进入” $M \times \{0\}$, 它们应当互相抵消. 而当线段一端在 $M \times \{0\}$ 上另一端在 $M \times \{1\}$ 上时, 贡献了一次“离开” $M \times \{0\}$ 和一次“进入” $M \times \{1\}$. 所以在计重数的意义下就可以讨论 $\#f^{-1}(y)$ 和 $\#g^{-1}(y)$ 之间的关系. 由于其整体和模 2 映射度的建立相同, 我们只简略地进行讨论.

Definition 1.3.50 (带权重的原像集计数). 设 $f : M \rightarrow N$ 相同维数可定向光滑流形之间的常态光滑映射, 并且已经事先选定好了 M 和 N 的定向, 这样在每个切空间上我们都选定了一个标架类.

现在假设 $df|_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ 为线性同构, 则 $df|_p$ 将 $T_p M$ 中的标架类推出到了 $T_{f(p)} N$ 中, 如果推出标架类和 $T_{f(p)} N$ 上原本选取的标架类定向相同, 则记 $\text{sgn } df|_p = 1$, 反之记 $\text{sgn } df|_p = -1$. 现在为每个正则值 y 我们可以定义

$$\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn } df|_x.$$

特别地, 如果 $M = N$, 我们也可以不事先选择定向, 而规定将两边赋予相同定向, 仍然可以良定义 $\deg(f; y)$.

Definition 1.3.51 (为正则水平集赋予定向). 设 $f : M \rightarrow N$ 是相同维数可定向光滑流形之间的光滑映射, 并且 M 和 N 已经被赋予了定向. 设 $y \in N$ 是一个正则值, 则我们可为 $f^{-1}(y)$ 按如下要求赋予定向: 我们知道 $T_x f^{-1}(y) = \ker df|_x$, 所以可选择一个 $T_x M$ 上对应于选取标架类的标架, 使得其前 $m - n$ 个分量构成 $\ker df|_x$ 的标架, 后 n 个分量推出到 $T_y N$ 上相容于 $T_y N$ 上对应的标架类. 这样我们就将 $T_x f^{-1}(y)$ 赋予前 $m - n$ 个分量所给出的标架类. 容易证明这样赋予的标架类与定义它所选取的标架无关.

Proposition 1.3.52. 设 $f, g : M \rightarrow N$ 是相同维数可定向光滑流形之间的常态光滑映射. 若 f 与 g 光滑同伦且存在 $F : f \simeq g$ 也是常态映射, 则对任意 f 与 g 的公共正则值 y 均有

$$\deg(f; y) = \deg(g; y).$$

Proof. 首先 $f \amalg g : M_+ \amalg M_- \rightarrow N$ 关于某个正则值 y 的映射度为 $\deg(f; y) - \deg(g; y)$, 其次 $f \amalg g$ 可延拓为 $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ 在边界上的限制, 我们可以说

明一维子流形 $f^{-1}(y)$ 中每条线段在两端分别给出一个正定向和反定向贡献, 从而

$$0 = \deg(f \coprod g; y) = \deg(f; y) - \deg(g; y).$$

证毕. \square

结合上齐次引理 1.3.48, 对任意两正则值我们总有 $\deg(f; y) = \deg(f; z)$, 从而我们可以对任意常态映射 f 良定义映射度 $\deg f$ 为任意正则值的带权重原像集大小.

Remark. 与 Riemann 面上的映射度相对比, 由于 Riemann 面之间的所有解析映射都是保定向的, 导致我们可以直接对原像集计数而不需要考虑正负符号.

在拓扑范畴中, 为了对常态映射定义映射度, 我们需要引入紧支上同调 $H_c^n(M)$ 和 $H_c^n(M; \mathbb{Z}_2)$, 对 $f: M \rightarrow N$ 我们就分别用它诱导出的最高阶紧支上同调上的映射 $H_c^n(M) \rightarrow H_c^n(N)$ 和 $H_c^n(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_c^n(N; \mathbb{Z}_2)$ 来在可定向情形下定义映射度和一般情形下定义模 2 映射度. 与上述建构相比, 这个定义更强调了为什么映射度是只关于 f 的性质, 但是实际运算中, 比如在计算球面映射度时会发现微分拓扑的定义方法非常便于计算, 当给定一个正则值时, 我们可以借助局部映射度验证这两种定义方法的等价性. 值得一提的是, 在 de Rham 上同调的语言中由于在最高阶微分形式上可定义积分, 所以映射度能直接用体积形式拉回的积分来定义

$$\int_M f^* \omega = \deg f \cdot \int_N \omega.$$

该定义相当之简洁, 且直接从定义出发, 验证映射度是整数这件事都并不平凡!

最后我们来简要介绍代数几何中的映射度概念. 回忆我们在例 1.3.44 中讨论了 Riemann 面之间映射的映射度和亚纯函数域之间域扩张的关系. 而对仿射簇而言, 一个簇自然会对应一个坐标环, 我们可用它来定义域扩张次数.

Definition 1.3.53 (有限支配态射与映射度). 设 $f: X \rightarrow Y$ 是仿射簇之间的支配态射, 则它诱导出坐标环上的同态 $f^*: A(Y) \rightarrow A(X)$, 这将 $A(X)$ 实现为了一个 $A(Y)$ -模. 若这给出一个有限生成模, 则称 f 是一个有限态射. 此时 $f^*: K(Y) \rightarrow K(X)$ 诱导一个有限域扩张, 我们就定义

$$\deg f = [K(X) : K(Y)].$$

这样定义出的映射度是一个纯代数概念. 事实上在几何上这里的有限性通常意味着常态 (逆紧) 性成立, 并且总是存在稠密开集 $U \subset Y$ 使得对任意 $y \in U$, 纤维 $f^{-1}(y)$ 恰好由 $\deg f$ 个点构成. 而对 Riemann 面来说, 我们就可以证明两种映射度的定义是相容的.

1.4 Sard 定理: 证明与应用

1.4.1 Sard 定理的证明

为了陈述 Sard 定理, 我们需要首先声明 Lebesgue 零测集在光滑流形上对应的概念. 注意, 在只有光滑结构时, 我们不能为流形赋予一个良好定义的测度, 这一点

不同于我们知道的每个流形都能被赋予一个度量结构, 因为通过局部坐标卡赋予欧氏空间所带测度的方法很明显不是典范的. 然而即便如此, 我们可以用坐标卡拉回的方法典范地讨论一个集合是否是 Lebesgue 零测集, 对它的讨论并不需要引入测度概念. (但需要光滑概念, 详见后文) 回忆一个集合 A 在欧氏空间 \mathbb{R}^n 上零测指的是它可以被可数个测度 (体积) 和足够小的矩体所覆盖:

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) : E_i \text{ 是矩体}, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\} = 0.$$

其中矩体 $E_i = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ 的测度被定义为 $m(E_i) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$. 关于 Lebesgue 零测集最重要的性质莫过于

- 可数个零测集的并仍是零测集.

这样根据流形的第二可数性, 它可被可数个坐标卡所覆盖. 于是, 对一个集合零测的判定可以化归为在每个坐标邻域上集合的零测性, 这样就可以拉回到欧氏空间上来讨论零测性了, 我们只需要验证在不同坐标卡选取下零测的概念不改变, 也就是零测性在光滑映射下被保持.

Lemma 1.4.1. 给定开集 $U \subset \mathbb{R}^n$, 光滑映射 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 把零测集映到零测集.

Proof. 考虑零测集 $E \subset U$. 首先在每个点 $x \in E$ 附近考虑标准开球 U_x, V_x 使得 $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset V_x \subset U$. 根据 Lindelöf 性, 存在可数个 U_x 的并能覆盖整个 E , 从而 $E = \bigcup_x (E \cap \overline{U_x})$, 因此只需证明每个 $E \cap \overline{U_x}$ 的像集零测.

由于 f 在整个 $\overline{U_x}$ 上有定义, 因此可对其利用微分中值定理, 得到对任意 $y \in \overline{U_x}$ 均有

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)| |x - y|, \quad \xi = tx + (1-t)y \text{ for some } t \in [0, 1].$$

根据 $\overline{U_x}$ 为紧集, $|f'(\xi)|$ 存在一致上界 M . 由于 $m(\overline{U_x} \cap E) = 0$, 取一系列开球 $\{B_i\}$ 覆盖 $\overline{U_x} \cap E$, 满足 $\sum m(B_i) < \varepsilon$. 设 $B_i = B_{r_i}(x_i)$, 那么所有开球的像的测度能被 ε 控制住, 具体而言有 $f(B_i) \subset B_{Mr_i}(f(x_i))$, 并且 $m(B_{Mr_i}(f(x_i))) = M^n m(B_i)$. 由于这些 $f(B_i)$ 能覆盖整个 $f(\overline{U_x} \cap E)$, 因此开集列 $B_{Mr_i}(f(x_i))$ 能覆盖整个 $f(\overline{U_x} \cap E)$,

$$m(f(\overline{U_x} \cap E)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M^n \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得结论. \square

Remark. 如果 f 只是连续函数, 利用 Cantor-Lebesgue 函数很容易构造出反例, 进而对拓扑流形无法良定义零测集的概念. 此外, 显然零测集在光滑映射下的原像不一定是零测集.

现在我们可以良定义下述概念:

Definition 1.4.2 (零测集). 设 M 是光滑流形, A 是 M 的子集. 若对任意坐标卡 $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, 均有 $\varphi(U \cap A)$ 是 \mathbb{R}^n 中的零测集, 则称 A 是 M 上的零测集.

现在我们终于可以来陈述 Sard 定理:

Theorem 1.4.3 (Sard). 对任意光滑映射 $f: M \rightarrow N$, f 的临界值集合在 N 中是零测集.

Example 1.4.4. 我们可以来验证几个典范的例子.

对典范浸入 $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$, 所有点 $x \in \mathbb{R}^n$ 都是临界点, 于是整个 $i(\mathbb{R}^n)$ 是临界值, 但由于它是 \mathbb{R}^m 的低维数子空间, 所以的确是一个零测集 (但显然可以不是有限集, 可数集).

对典范淹没 $p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$, 每个点都是正则点, 所以没有临界值, 这是我们所期望的最好情况.

对常值映射 $f = \text{const } c$, 只有 c 这个点是临界值, 其余点没有原像, 从而是正则值, 故临界值集合零测.

下面开始证明 Sard 定理. 虽然我们花了一些力气验证定义对流形有效, 但是整个问题仍然几乎是仅关于欧氏空间的. 我们可以对命题进行第一步简化: 由于 M, N 都是第二可数的, 因此可用可数个坐标卡 $\{U_i\}_{i=1}^\infty, \{V_j\}_{j=1}^\infty$ 分别覆盖 M, N . 首先在定义域上, 如果能证明每个 $f_i: U_i \rightarrow N$ 给出的临界值零测, 那么整个 f 的临界值也零测. 再在值域上, 分别考虑每个 $f_{ij}: f_i^{-1}(V_j) \rightarrow V_j$ 给出的临界值, 从而只需证明每个 f_{ij} 给出的临界值零测. 拉回到欧氏空间上, 我们发现只需证明:

Proposition 1.4.5. 给定开集 $U \subset \mathbb{R}^n$, 则 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的临界值构成集合零测.

比较简单的是 $n < m$ 的情形, 此时临界值集合就算 $\text{im } f$. 将 f 视为 $U \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的映射, 由于 $U \times \{0\}$ 在 $U \times \mathbb{R}^{m-n}$ 中是零测集, 因此整个 $\text{im } f$ 在 \mathbb{R}^m 上零测, 从而临界值构成集合零测.

再考虑 $n \geq m$ 的情形. 采取归纳法 (这一想法的来源是, 我们可以通过选取不同的坐标卡使 f 的形态变好, 比如在某个分量上恒同, 这样关于临界性得到讨论就可以降维), 当 $n = 0$ 时命题显然成立. 设 $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. 记 C 为全体临界点所成集合, 那么需证 $m(f(C)) = 0$. 考虑

$$C_j = \{x: \partial^\alpha f_i(x) = 0, \forall i, \forall |\alpha| \leq j\}.$$

(这个分类看上去很奇怪, 因为 C_1 其实就给出了满足 $\text{d}f|_x = 0$ 的点集, 在整个 C 中理应算作一个“小情形”) 首先来看 $f(C \setminus C_1)$.

Proposition 1.4.6. $f(C \setminus C_1)$ 是零测集.

Proof. 对每个 $x \in C \setminus C_1$, 存在 i, j 使得 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_x \neq 0$, 不妨设 $i = j = 1$. (由于 i, j 仅有有限种选择, 因此只需要考虑满足 $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_x \neq 0$ 的临界点集合 S , 并证明 $f(S)$ 零测) 考虑

$$g: (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$$

dg 对应的矩阵形如 $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & 0 \\ * & \text{id} \end{pmatrix}$, 从而在 x 处可逆. 由反函数定理, 在 x 附近 g 给出一个同胚, 设 g 给出 $x \in U_x \rightarrow V_x$ 的同胚. 关键在于注意到 $f \circ g^{-1} : V_x \rightarrow \mathbb{R}^m$ 因为同胚的原因, 其临界值集合就是整个 $f(S \cap U_x)$ (相当于说, 如果有线性同构 S 和线性映射 T , 那么 $\text{im } T = \text{im } T \circ S$), 因此对每个 $x \in S$ 考虑对应的一个 V_x , 那么每个 $f \circ g^{-1}|_{V_x}$ 的临界值之并就给出 $f(S)$. 更细致地进行讨论, 根据欧氏空间的第二可数性可选择可数个 x_i 使得

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{x_i} = \bigcup_x U_x \Rightarrow f(S) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(S \cap U_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Crit}(f \circ g^{-1} : V_{x_i} \rightarrow \mathbb{R}^m).$$

从而要证 $m(f(S)) = 0$, 只需证明 $f \circ g^{-1} : V_x \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的临界值零测, 由于之后证明和 x 无关, 下面省略和定义域有关的标注 (做到这里, 我们发现就是利用可数可加性把 f 的临界值零测化归为证明更好的函数 $f \circ g^{-1}$ 临界值零测). 注意到 $f \circ g^{-1}$ 在第一个分量上是恒同, 因此可对每个 $t \in \mathbb{R}$ 定义

$$h_t : V_x \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}, \quad h_t(t, \cdot) = (f_2(t, \cdot), \dots, f_m(t, \cdot)).$$

把 h_t 视为 \mathbb{R}^{n-1} 中的开集到 \mathbb{R}^{m-1} 的映射, 故可利用上归纳假设. 此时在每个点 (y_1, y_2, \dots, y_n) 处, 如果 $d(f \circ g^{-1})$ 不是满射, 那么 dh_{y_1} 在 (y_1, \dots, y_n) 处也给不出满射. 这给出

$$\text{Crit}(f \circ g^{-1}|_{V_x}) \subset \bigcup_t \{t\} \times \text{Crit}(h_t).$$

根据归纳假设, 每个 $\text{Crit}(h_t)$ 都零测. 虽然 $f \circ g^{-1}$ 的临界值包含于这不可数个集合的并, 但是实际上 $\text{Crit}(h_t)$ 包含了 $\text{Crit}(f \circ g^{-1})$ 中第一个分量为 t 的点构成的集合, 所以事实上它们给出沿第一个坐标的“切片”. 根据 Fubini 定理,

$$m(\text{Crit}(f \circ g^{-1})) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(\text{Crit}(h_t)) = 0.$$

这就证完了 $m(C \setminus C_1) = 0$. □

稍微改装一下证明, 就可以给出 $m(C_i \setminus C_{i+1}) = 0$, 事实上下面更强的

Proposition 1.4.7. 给定函数 $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 并记 $U' = \{x : u_1(x) = 0, \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \neq 0\}$, 则 $\text{Crit}(f|_{U'})$ 零测.

Proof. 考虑

$$g : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (u_1(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$$

对每个 $x \in U'$, 设 g 在 $x \in U_x \rightarrow V_x$ 上是同胚 (注意这里 U' 可能不是开集, 但是只需要 $U_x \subset U$ 就可以), 并且根据可数性可取出一列 x_i 使得

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (U_{x_i} \cap U') = U'.$$

因为 $\text{Crit}(f|_{U_{x_i} \cap U'}) = \text{Crit}(f \circ g^{-1}|_{V_{x_i} \cap g(U')})$, 所以只需证明 $\text{Crit}(f \circ g^{-1}|_{V_{x_i} \cap g(U')})$ 零测.

注意到 $g(U')$ 的第一个分量始终为零, 所以 $V_{x_i} \cap g(U')$ 落在 $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \cap V_{x_i} := V'$ 内, 这是一个 $n-1$ 维开集, 考虑 $f \circ g^{-1}$ 在这个开集上的限制映射 $\overline{f \circ g^{-1}}$, 归纳假设给出 $\text{Crit}(V')$ 零测. 并且如果 y 是 $\overline{f \circ g^{-1}}$ 的正则点, 那么就一定是 $f \circ g^{-1}$ 的正则点, 从而 $f \circ g^{-1}|_{V'}$ 上的临界点一定是 $\overline{f \circ g^{-1}}$ 的临界点, 故

$$\text{Crit}(f \circ g^{-1}|_{V'}) \subset \text{Crit}(\overline{f \circ g^{-1}}).$$

因此 $\text{Crit}(f|_{U'})$ 零测, 证毕. \square

Remark. 对比一下两种情况下坐标变换的异同: 都给出局部同胚并利用可数可加性使得只需证明局部上临界值零测, 不同点是在 1.4.6 中坐标变换使得在一个坐标上是恒同映射, 因此可以把定义域和值域都降一维, 然后对每一层都可以用归纳假设证明零测, 由 Fubini 定理这些零测的层拼起来也零测. 而在 1.4.7 中坐标变换和要考虑的 f 相对分离, 只能对定义域降一维, 实际上这个坐标变换起到了一个类似子流形坐标卡的作用, 把大集合 U_x 同胚到欧氏空间的同时把小集合 $U' \cap U_x$ “拉平”到子空间 $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 内, 从而实现降维.

特别地, 对每个 $|\alpha| \geq 1$ 令 $u = \partial^\alpha f$ 容易得到对每个 $i \geq 1$, 都有 $m(C_i \setminus C_{i+1}) = 0$. (对 $|\alpha| = 0$ 不行, 因为我们没法控制 $f(x)$ 的值, 但在 C_1 中已经有 $df|_x = 0$ 之类的条件) 但这还不足以完成证明, 因为全体 C_i 的并不得到 C (可能存在某个点的任意阶偏导数均为零) 因此我们需要利用另一种方法证明当足够高阶微分取零时自动有其像集为零. 下面的命题可以看作引理 1.4.1 的进一步定量细化 (它们的思想是一样的).

Proposition 1.4.8. 给定 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, 存在 N 使得对任意闭方块 $I \subset U$ 有 $m(f(C_N \cap I)) = 0$.

Proof. 不妨设方块边长为 δ . 如果 $x \in C_N$, 那么对任意 $y \in I$ 通过 Taylor 公式可知:

$$f(y) - f(x) = \frac{|x - y|^{N+1}}{(N+1)!} d^{N+1}|_x(\xi, \dots, \xi), \quad |\xi| \in [0, 1].$$

最后一项作为关于 x, ξ 的有界闭集中的函数存在上界, 即存在仅和 f 有关的常数 C 使得

$$|f(y) - f(x)| \leq C \cdot |x - y|^{N+1}.$$

现在待定 l , 将 I 每条边 l 等分, 划分为 l^n 个小方块之并. 如果一个小方块中含有 C_N 中的点 x , 那么由于小方块内其它点 y 距离 x 不超过 $\sqrt{n}(\delta/l)$, 所以 $f(y)$ 到 $f(x)$ 的距离不超过 $D \cdot l^{-N-1}$, 其中 D 是仅依赖于 f, I 的常数. 所以这个小方块的像的测度不超过 $E \cdot l^{-m(N+1)}$. 由于划分只产生了 l^n 个小方体, 因此

$$m(f(C_N \cap I)) \leq \sum_{I_j: \exists x \in C_N, x \in I_j} m(f(I_j)) \leq E \cdot l^{n-m(N+1)}.$$

从而对固定的 n , 总存在 N 使得 $n - m(N + 1) < 0$. 由于常数 E 与 l 选取无关, 因此令 $l \rightarrow 0$ 就得到 $m(f(C_N \cap I)) = 0$, 并且 N 的选取也和 I 的边长 δ 无关, 证毕. \square

根据上面的命题, 首先取定仅依赖于 m, n 的 N , 由于用可数个闭方体 $I \subset U$ 能够覆盖整个 C_N (在每个点处取一个闭方体含于 U , 然后用它们的内部挑选出可数子覆盖), 因此 $m(f(C_N)) = 0$. 从而结合上之前所有的命题, 就归纳证明了 $m(f(C)) = 0$, Sard 定理证毕.

我们对代数几何中的“Sard 型”命题作一个介绍. 在代数几何中, 对一个仿射簇可能存在形态不好的点, 它们被称之为**奇异点**, 在奇异点附近仿射簇甚至不构成流形. 给定一个态射 $f: X \rightarrow Y$, 我们可以用其**纤维是否光滑**来对应所谓的正则值概念. 由于我们使用的 Zariski 拓扑没有良好的测度论概念, 而我们又直观感受过 Zariski 开集一般都很大, 闭集相对较小, 因此在代数几何中我们常常用**真闭子集**或者**维数下降**来替代“测度为零”, 用**非空开集**来替代“几乎处处”.

首先对于光滑点和奇异点我们有一个“Sard 型”结论.

Theorem 1.4.9 (奇异点的闭性与低维性). 设 X 是域 k 上的仿射簇, 则 X 的奇异点集 $\text{Sing}(X)$ 构成 X 的一个 **Zariski 闭子集**. 若域 k 的特征为零, 则我们还有

$$\dim \text{Sing}(X) < \dim X.$$

于是光滑点集构成 X 中的一个**稠密开集**.

与临界值相关的“Sard 型”结论被称为 Generic Smoothness. 回忆 1.3.9 中正则支配映射的概念, 我们有如下结论成立:

Theorem 1.4.10 (Generic Smoothness). 设 k 为特征零的代数闭域, X 是光滑代数簇, $f: X \rightarrow Y$ 是代数簇之间的正则支配映射. 则存在一个**非空 Zariski 开子集** $U \subset Y$ (从而也是稠密的), 使得限制态射 $f|_{f^{-1}(U)}: f^{-1}(U) \rightarrow U$ 是一个**光滑态射**, 从而对任意 $y \in U$ 均有其纤维 $f^{-1}(y)$ 是光滑的.

于是在这样的假设下“几乎所有点”都是关于 f 的“正则值”. 结合之前对映射度的讨论, 我们得到:

Proposition 1.4.11. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个有限支配映射, 则存在一个 Zariski 开集 $Y_0 \subset Y$ 使得对任意 $y \in Y_0$, 其拓扑原像集大小就是映射度 $\deg f = [K(X): K(Y)]$.

在最后我们可以来叙述 Zariski 主定理, 它告诉我们常态 (proper) 态射的纤维在什么条件下是连通的, 以及如何将“非有限”的态射分解为“有限”部分和“纤维连通”部分.

Theorem 1.4.12 (Zariski 连通性定理). 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个常态 (proper) 的正则支配态射, 其中 X, Y 是代数闭域上的不可约代数簇. 如果 Y 是正规的, 那么:

1. 所有纤维 $f^{-1}(y)$ 都是连通的.
2. 存在 Y 中的一个稠密开集 U , 使得对于任意 $y \in U$, 纤维 $f^{-1}(y)$ 不仅连通, 而且是几何连通的 (在代数闭包上保持连通).

这个定理将 Generic Smoothness 的“一般纤维光滑”提升到了“所有纤维连通”的更强结论, 即纤维的“连通性”不会发生跳跃.

Theorem 1.4.13 (Zariski主定理: 拟有限版本). 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个拟有限 (即所有纤维都是有限集) 的常态态射, 且 Y 是正规的. 那么 f 本身就是一个有限态射.

这直接关联到有限支配态射的映射度, 它使得映射度可被全局定义.

我们接下来利用 Sard 定理给出一些应用, 由此可以看出它在微分拓扑中的奠基地位.

1.4.2 Whitney 嵌入定理

我们在很早之前就有提及流形是否能被实现为欧氏空间的子流形的问题, 该命题在历史上具有重要的地位, 它说明了内蕴和外蕴的流形定义是相同的. 事实上, 我们还能对嵌入的维数给出上界:

Theorem 1.4.14 (Whitney). 任意 n 维光滑流形都能嵌入在 \mathbb{R}^{2n+1} 中, 浸入在 \mathbb{R}^{2n} 中.

需要指出 Whitney 嵌入定理并非给出最优的界. Whitney 自己使用了不同的技术证明了 **强 Whitney 嵌入定理**, 它表明当 $m \geq 2$ 时上述嵌入的维数还能再降低 1 维. 再往后, 人们证明了根据维数的二进制展开结果, 嵌入维数还能进一步降低. 由于证明的手法颇为不同, 这里不再作介绍.

我们接下来专注于定理 1.4.14 的证明. 证明大致分为两步, 第一步是先把流形嵌入到维数足够大的欧氏空间中 (然而正是这一事实的证明属实令我感到惊讶: 因为当我第一次看到该命题时觉得毫无下手之处, 可能需要用很高深的技术, 但我们只需要借助单位分解就够了!), 然后再通过 Sard 定理寻找一个好方向投影到低维度的空间中. 我们会发现单浸入性质是容易通过好方向的选取而保证的, 但是要使 f 给出 $M \rightarrow f(M)$ 的拓扑同胚这一点很难说明. 所幸我们有 1.3.21, 这保证了 M 是紧流形时证明可直接完成, 而当 M 是非紧流形时我们只用适当调整使得 f 是常态映射即可.

将紧流形嵌入在欧氏空间中的命题证明细节相对较少, 我们先对此证明之.

Proof for 1.4.14, closed manifold version. 证明分为以下几个步骤:

Step 1. 紧流形 M 总可以被有限个坐标卡覆盖. 即存在有限个 $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, \ell$ 使得这些 U_i 给出 M 的一个开覆盖. 现在选取从属于这些 U_i 的一个单位分解 $\{\chi_i\}$.

我们这样来考虑这个命题：不要想在几何上是如何把一个流形嵌入在欧氏空间中的，而是考虑如何用一些坐标去“识别”出一个点（从而保证了单性），如果选用的函数是自然的那么会容易保证浸入性成立。现在从属于这些坐标卡的单位分解映射可以识别出一个点所在的坐标卡位置，那么只要再知道该点在这个坐标卡上的坐标就完全确定了该点。为了让坐标卡映射成为全局函数，我们只需考虑 $\varphi_i(x)\chi_i(x)$ （作为 n 个函数）。令

$$\Phi : x \mapsto (\chi_1(x), \chi_1(x)\varphi_1(x), \dots, \chi_\ell(x), \chi_\ell(x)\varphi_\ell(x))$$

则若 $\Phi(x) = \Phi(y)$ ，则存在某个 i 使得 $\chi_i(x) = \chi_i(y) > 0$ ，这意味着 $x, y \in U_i$ 。又因为 $\chi_i(x)\varphi_i(x) = \chi_i(y)\varphi_i(y)$ ，所以 $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ ，因此 $x = y$ 。

再证 Φ 是浸入映射：只需证明对任意 $x \in M$ 和 $\mathbf{v} \in T_x(M)$ ，如果 $d\Phi|_x(\mathbf{v}) = 0$ ，那么 $\mathbf{v} = 0$ 。而

$$d\Phi|_x(\mathbf{v}) = (d\chi_1|_x(\mathbf{v}), d\chi_1|_x(\mathbf{v})\varphi_1(x) + \chi_1(x)d\varphi_1|_x(\mathbf{v}), \dots)$$

取 i 使得 $x \in U_i$ ，则 $d\Phi|_x(\mathbf{v}) = 0$ 表明 $d\chi_i|_x(\mathbf{v}) = 0$ 从而 $d\varphi_i|_x(\mathbf{v}) = 0$ ，但 φ_i 是线性同构，所以 $\mathbf{v} = 0$ 。于是 Φ 是紧流形的单浸入，从而是嵌入。

Step 2. 现在 M 已经被嵌入在了 \mathbb{R}^N 中，嵌入映射记作 ι 。每个投影方向 $[\ell]$ 可以被一个一维子空间所表示，它们构成流形 $\mathbb{R}P^{N-1}$ 。我们考虑怎样的方向使得投影映射同时保持单性和浸入性。

- 为了保证单射性，我们希望对任意 $x, y \in M$ 都有 $x - y$ 所指方向与 $[\ell]$ 不同。这可以换种方式叙述：对任意不同两点 $x, y \in M$ ， $x - y$ 会唯一确定一个方向 $[\mathbf{v}]$ ，我们希望选择的 $[\ell]$ 避开所有这样的方向。事实上，所有这样的点可实现为一个光滑映射的像：


$$f : M \times M / \Delta \rightarrow \mathbb{R}P^{N-1}, \quad (x, y) \mapsto [x - y].$$

其中 $\Delta = \{(x, x) \in M \times M\}$ 是所谓对角线流形，根据流形的 Hausdorff 性可知 Δ 是闭集，因此 $M \times M / \Delta$ 的确是个流形，它的维数是 $2n$ 。所以只要 $2n < N - 1$ ，那么利用 Sard 定理 1.4.3， f 的像集是零测集，从而几乎所有方向都能保证单射性成立。

- 为了保证浸入性，只需让投影方向不处于任意点的（外蕴）切空间中即可。为了考虑所有切向量嵌入到 \mathbb{R}^N 中所得方向，回忆切丛和微分的概念 1.2.11，

$$g : TM \xrightarrow{d\iota} T\mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}P^{N-1}, \quad (p, \mathbf{v}) \mapsto (\iota(p), d\iota|_p(\mathbf{v})) \mapsto [d\iota|_p(\mathbf{v})]$$

描述了所有可能的切向量方向，并且这这也是一个光滑映射。由于 TM 也是 $2n$ 维流形，所以只要 $2n < N - 1$ ，那么利用 Sard 定理 1.4.3， g 的像集是零测集，从而几乎所有方向都能保证单射性成立。

于是几乎所有方向都能同时保证单射性和浸入性成立, 选择一个方向并投影, 便可将 M 嵌入到 \mathbb{R}^{N-1} 之中, 直到 $N = 2n + 1$ 时无法再进行降维操作. 

Remark. 我们一般用不到浸入在低 1 维数的结论, 但是让我们看看在哪里可以加以改进. 只需证明保证浸入性时可以省去一个维度. 这是因为我们可以用所谓球丛来代替切丛, 即只需要考虑所有单位切向量在欧氏空间上指代的全体方向就足够了. 球丛是 $2n - 1$ 维流形, 因此 Sard 定理允许我们对 $N = 2n + 1$ 给出降维投影, 得到 M 在 \mathbb{R}^{2n} 中的浸入.

接下来我们考虑如何将一般流形嵌入到 \mathbb{R}^{2n+1} 中. 上面的证明步骤其实只在两个地方用到紧性: 一是在一开始选取有限个坐标卡时, 二是紧流形上的单浸入给出嵌入. 换句话说, 不依赖于紧性我们能得到下述两个命题:

Proposition 1.4.15. 若光滑流形 M 可被有限个坐标卡覆盖, 则它可以被单浸入到足够大的欧氏空间中.

Proposition 1.4.16. 给定 $N > 2n + 1$, 若 n 维光滑流形 M 可单浸入到 \mathbb{R}^N 中, 那么可通过复合一个降维投影单浸入到 \mathbb{R}^{N-1} 中. 进而, 任意可被有限个坐标卡覆盖的光滑流形 M 可单浸入到 \mathbb{R}^{2n+1} 中.

我们还需要一个引理:


Lemma 1.4.17 (光滑穷竭函数). 对任意光滑流形 M , 存在光滑非负函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 使得对任意 $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty, c])$ 都是 M 的紧子集.

Proof. 选取一系列开集 $U_0 \subset U_1 \subset \dots$ 使得 $\overline{U_i}$ 是紧集并且 $\bigcup U_i = M$. 根据光滑 Urysohn 引理, 存在函数 f_i 在 $\overline{U_i}$ 上恒为 0, 在 $M - U_{i+1}$ 上恒为 1, 并在 $U_{i+1} - \overline{U_i}$ 上取值位于 $(0, 1)$ 中. 现在考虑

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i.$$

f_i 非负光滑函数, 并且对任意 $x \in \overline{U_k} - \overline{U_{k-1}}$, 则当 $i \geq k$ 时 $f_i(x) = 0$, 当 $i \leq k - 2$ 时 $f_i(x) = 1$, 而 $f_{k-1}(x) \in (0, 1]$. 于是我们恰好有

$$\overline{U_k} - \overline{U_{k-1}} = f^{-1}([k - 1, k]).$$

所以 $f^{-1}((-\infty, c])$ 总是 M 的紧子集. 

现在先对一般流形证明它可以被单浸入到足够高维数的欧氏空间中. 想法还是和之前类似: 我们要找一些函数并通过它们“识别”出所有点. 我们还可以使用前面刚刚证明的结论, 为一整个紧流形选取一个识别函数. 引理中的光滑穷竭函数起到一个类似“等高线”的作用, 帮助我们大概判断一个点所处的高度. 每两条整数等高线之间给出一个紧流形, 每个紧流形对应一个识别函数, 为了让它全局可定义可以选取单位分解让它支在其所在高度的附近. 现在虽然识别函数有无穷多个, 但是很多识别

函数离得很远：它们的支集（两两）交为空。因此我们可以把这些识别函数相加，这样对每个点我们可以通过其高度判断这个分量到底指示的是哪部分的坐标，进而确定它所在的具体位置。

Proof. 取光滑穷竭函数 f ，设 $M_i = f^{-1}([i, i+1])$ 。 M_i 可以被有限个局部坐标卡覆盖，我们适当缩小这些坐标卡，使得它们的并 $N_i \subset f^{-1}([i-0.1, i+1.1])$ 。由于 N_i 是 M 的开子集，因此也是一个光滑流形。再根据它可被有限个坐标卡覆盖，根据命题 1.4.16，存在单浸入 $\Phi_i : N_i \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ 。（我们有必要应用维数的一致性：即嵌入到的维数 \mathbb{R}^{2n+1} 和 i 无关，和覆盖坐标卡个数无关，否则没法把它们放在同一个识别函数中）再为每个 i 选取光滑截断函数 χ_i 在 N_i 上恒为 1 并支在 $f^{-1}([i-0.2, i+1.2])$ 中。

现在考虑

$$\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{4n+3}, \quad x \mapsto (f(x), \sum_{i \text{ odd}} \chi_i(x) \Phi_i(x), \sum_{i \text{ even}} \chi_i(x) \Phi_i(x)).$$

- 验证 Φ 为单射：若 $\Phi(x) = \Phi(y)$ ，设 $f(x) = f(y) \in [i, i+1]$ ，则 $x, y \in N_i$ 。不妨设 i 为奇数，则在奇数维无限求和中，除了 $\chi_i(x) = 1$ 之外其余求和项均为零，这意味着 $\Phi_i(x) = \Phi_i(y)$ ，而根据 Φ_i 的单性可知 $x = y$ 。
- 验证 Φ 为浸入：对任意 $x \in N_i$ ，不妨设 i 为奇数，则奇数维无限求和输出结果就是 $\Phi_i(x)$ ，而 Φ_i 在 x 处是浸入，从而 Φ 在 x 处是浸入。

这就给出了从非紧流形 M 到 \mathbb{R}^{4n+3} 的单浸入，根据降维投影的操作， M 可被单浸入到 \mathbb{R}^{2n+1} 中。



最后，只需下面的命题就可完成一般情形 Whitney 嵌入定理的证明：

Proposition 1.4.18. 若光滑流形 M 可被单浸入到 \mathbb{R}^N 中，那么就能被逆紧（常态）单浸入到 \mathbb{R}^N 中，从而可被嵌入在 \mathbb{R}^N 中。

Proof. 我们仅展示证明概要。思路仍然是利用刚才的穷竭函数，为了直观我们可以先想象在平面 \mathbb{R}^2 上有一个流形 M ，那么可在 \mathbb{R}^3 中画出该流形在穷竭函数 f 下的图像 Γ_f ，由于 f 是逆紧的，因此这给出了 $M \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的逆紧单浸入。（这是因为 \mathbb{R}^3 中紧集的原像总是包含在 \mathbb{R} 中一个有界闭区间在 f 下的原像，后者是一个紧集）于是我们只需要找一个好方向把它重新投回 \mathbb{R}^2 中即可。为了保证逆紧性，我们需要在这个方向上的任意向两端无限延伸的底面有界圆柱与 Γ_f 的交在 z 轴投影上为有界集。但直接这样做会遭遇技术上的困难，因为直观上图像可以完全位于整个圆柱之内。

我们可以在初始通过一步假设来规避掉这种情况：在一开始选取一个微分同胚把 M 在 \mathbb{R}^2 上的像变到一个有界集，比方说 $D(0, 1)$ 中，那么图像 Γ_f 就位于一个无界正圆柱中。现在对任意斜方向的无界圆柱，它和 M_f 的交总是位于两个圆柱的交中，而这在 \mathbb{R}^3 中必定是一个有界集，从而它在 z 方向上投影也是有界集，这就给出了逆紧（常态）性。一般的 n 维情形的考量是完全类似的。



作为 Whitney 嵌入定理给出具体嵌入维数的第一个应用, 我们考虑 $n = 1$ 的情形. 这告诉我们任意 1 维流形都可以被嵌入到 \mathbb{R}^3 中, 浸入到 \mathbb{R}^2 中.

Definition 1.4.19 (纽结与链环). 一个从 S^1 到 \mathbb{R}^3 (或者 S^3) 的嵌入被称为一个**纽结**, 从 $\coprod S^1$ 到 \mathbb{R}^3 (或者 S^3) 的嵌入被称为一个**链环**.

更一般地, 我们可以把任意 S^p 或者 $\coprod S^{p_i}$ 在拓扑空间 X (常用 \mathbb{R}^n 与 S^n) 中的嵌入称为一个**纽结/链环**.

我们可以在不同范畴下研究纽结. 除了一般的拓扑范畴, 较为常用的有 PL 范畴 (Piecewise Linear) 以及 C^∞ 范畴. 它们会导向不同的理论.

两个纽结被称为**等价的**, 如果存在一个 X 的自同胚 Φ 把一个 S^p 的像变换到另一个. 如果我们额外要求存在从 id 到 Φ 的同伦 h , 使得每个 h_t 都是自同胚, 那么称这两个纽结是**同痕等价的**. 平凡嵌入 $S^p \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ 或 $S^p \hookrightarrow S^n$ 给出的纽结被称为**平凡纽结**.

Proposition 1.4.20. \mathbb{R}^4 中的任意 C^∞ 纽结都同痕等价于平凡纽结.

Proof. 将该纽结记为 K . 根据 Whitney 嵌入定理 1.4.14 的证明, 我们可在 \mathbb{R}^4 中选取一个方向, 使得沿该方向投影给出纽结在 \mathbb{R}^3 中的嵌入. 现在建立坐标系并以该投影方向为 w 轴. 为了建立一个到 \mathbb{R}^3 的同痕, 首先取

$$f : \pi_w(K) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto w : (x, y, z, w) \in K.$$

则这是 $\pi_w(K)$ 上的光滑函数, 然后将 f 延拓到整个 \mathbb{R}^3 中, 那么

$$h_t : (x, y, z, w) \mapsto (x, y, z, w - t \cdot f(x, y, z))$$

就给出一个同痕, 把 K 同痕到三维空间中.

用同样的方法可以寻找一个 K 在平面 \mathbb{R}^2 上的性态足够好的投影. (这被称为**正则投影**) 还是回顾 Whitney 嵌入定理的证明, 在 \mathbb{R}^3 中虽然我们不能保证找到一个方向保持单性, 但是

$$f : K \times K / \Delta \rightarrow \mathbb{R}P^2, \quad (x, y) \mapsto [x - y].$$

是相同维数流形之间的光滑映射. 特别注意由于 K 是一维, 因此对角线上的点 (x, x) 也有良定义的像, 即该点处唯一的切线所指的方向. 于是 f 成为相同维数紧流形之间的映射, 根据 Sard 定理存在正则值 $[v]$. 在相同维数时, 正则值的原像附近总给出局部同胚, 因此其原像集是离散集, 进而是有限集. 这说明向该方向投影时, 至多产生有限次“碰撞”, 即在有限个点产生重叠, 重数为有限值. 经过适当的微扰, 我们可以保证没有三次及以上的重点产生, 每次相交都形如“十字架”, 一根线被压在另一根的下方. 这样的 \mathbb{R}^2 上的图可以完全表示该纽结.

下一步是证明给定一个纽结的图, 可以通过有限次在相交点处上行和下行的手术来将一个结变换为平凡结. 从任意非交叉点出发, 我们绕某个方向沿图运动, 每当

第一次经过某个交叉点时，我们都适当进行手术使得走的是下行路线，直到运动回初始点. 这样的运动可为每个点赋予一个时间函数 t ，我们将 t 作为该点处的 z 轴坐标，把这条道路提升到 \mathbb{R}^3 中，然后用一条竖直线段将其闭合，得到的结果与 K 同痕. 这是合法的，因为我们总是先走下行道路再走上行道路，所以位于上方点的 t 值总是比位于下方的要大. 又由于 z 轴值恰对应一个点，因此我们可做一个明显的“拉直”操作把这一提升后的道路同痕到一条线段. 因此手术所得结果是一个平凡结.

最后，我们只需在局部上证明给定一个交叉的图案，我们能在 \mathbb{R}^4 中把交叉上下翻转. 考虑

$$\begin{aligned}\ell_1 : & (-1, 0, 0, 0) \xrightarrow{\text{move } z} (-1, 0, 1, 0) \xrightarrow{\text{move } x} (1, 0, 1, 0) \xrightarrow{\text{move } z} (1, 0, 0, 0) \\ \ell_2 : & (0, -1, 0, 0) \xrightarrow{\text{move } y} (0, 1, 0, 0).\end{aligned}$$

我们想证明能把 ℓ_1 在四维空间中反转为


$$\ell'_1 : (-1, 0, 0, 0) \xrightarrow{\text{move } z} (-1, 0, -1, 0) \xrightarrow{\text{move } x} (1, 0, -1, 0) \xrightarrow{\text{move } z} (1, 0, 0, 0)$$

这是容易的：我们可以 \mathbb{R}^2 为轴选取一个 \mathbb{R}^4 中的旋转：

$$\phi_t : (x, y, z, 0) \mapsto (x, y, z \cos t, z \sin t).$$

则

$$\phi_t(\ell_1) : (-1, 0, 0, 0) \xrightarrow{\text{move } z, w} (-1, 0, \cos t, \sin t) \xrightarrow{\text{move } x} (1, 0, \cos t, \sin t) \xrightarrow{\text{move } z, w} (1, 0, 0, 0)$$

$\phi_0(\ell_1) = \ell_1$ 而 $\phi_\pi(\ell_1) = \ell'_1$ ，并且旋转过程中由于第四个维度取值总非零，因此不会和一开始的纽结产生自交. 证毕. 

而对 \mathbb{R}^2 或 S^2 上的纽结，著名的 Jordan 曲线定理和 Schönflies 定理告诉我们 S^2 上的任意闭曲线把空间分为两个连通分支，并且每个连通分支都同胚于 D^2 . 任意两条 \mathbb{R}^2 上的闭曲线 K, L 之间存在同胚 Φ ，作为圆盘边界之间的映射它可以被延拓到整个圆盘上，从而给出 $S^2 \rightarrow S^2$ 的自同胚把 K 映为 L . 这就说明了 S^2 上的任意两个纽结是等价的，对 \mathbb{R}^2 也是如此.

因此，对纽结来说唯一有意义的研究维数是 3. 而在三维空间中，确实有各式各样的不等价的纽结，人们发展了一系列的纽结不变量来研究它们. 更多的问题不再在这里赘述.

在最后我们简单称述复流形和代数几何中嵌入问题的一些结果. 首先来看复流形. 很明显我们不能奢求将任意复流形全纯嵌入到 \mathbb{C}^n 中，这是因为对任意紧子流形 $M \subset \mathbb{C}^n$ ，每个坐标分量均可以看作 M 上的全纯函数，但紧性告诉我们这样的全纯函数必然平凡，于是 M 至多是单点集. 而非紧流形能否嵌入 \mathbb{C}^n 有充要条件. 为了陈述命题，我们引入一些概念：

Definition 1.4.21 (Stein 流形). 设 M 是复流形， $\mathcal{O}(M)$ 是 M 对应的全纯函数环.

- 称 $\mathcal{O}(M)$ 具有**点分离性**, 如果对任意 $p \neq q \in M$, 存在 $f \in \mathcal{O}(M)$ 使得 $f(p) = 0$ 而 $f(q) \neq 0$.
- 称 $\mathcal{O}(M)$ 具有**方向分离性**, 如果对任意 $p \in M$, $v \in T_p M$, 均存在 $f \in \mathcal{O}(M)$ 使得 $D_v|_p f \neq 0$.
- 对任意 $K \subset M$, 定义其**全纯闭包**为

$$\widehat{K} = \{z \in M : |f(z)| \leq \sup_K |f| \text{ for all } f \in \mathcal{O}(M)\}.$$

称 M 具有**全纯凸性**, 如果对任意 M 中紧集 K , \widehat{K} 都是 M 中紧集.

称 M 是 Stein 流形, 如果 M 同时满足上述三个性质.

我们可以容易验证可逆紧 (常态) 嵌入 \mathbb{C}^n 的子流形都是 Stein 流形: 全体坐标映射保证了点分离性和方向分离性. 设 $K \subset M$ 在 \mathbb{C}^n 中的像落在 $\{|z| < R\}$ 中, 那么对任意 $|w| > R$, 考虑 $f = z \cdot \bar{w}$ 就有 $|f(w)| = |w|^2 > \sup_K |f|$, 于是 \widehat{K} 是有界集, 从而 \widehat{K} 是有界闭集, 所以是紧集. 有趣的是该命题的逆命题也成立:

Theorem 1.4.22 (Stein 嵌入定理). 任何 Stein 流形都可以逆紧嵌入到 \mathbb{C}^n 中.

除了 \mathbb{C}^n 之外, 我们还比较关心一个复流形能否被嵌入在复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 中. 这涉及到不少更深入的知识.¹ 另一方面, 在古典代数几何中我们也总是研究能够被嵌入在 k^n 和 $k^{n+1} - \{0\}/k^\times$ 中的代数簇. 即便如此, 也存在不能被嵌入在 $\mathbb{C}P^n$ 中的复流形/代数簇. 我们可以用下面的命题作为替代物:

Theorem 1.4.23. 称一个代数簇是**拟射影的**, 若存在一个从它到射影空间的浸入. 则任意光滑, 拟射影的 n 维代数簇都可以被嵌入到 $2n+1$ 维射影空间中.

1.4.3 Morse 理论

我们在 1.3 节中曾讨论过代数几何中的奇点附近的性质, 这带给我们不少有趣的几何现象. 而在微分拓扑里, 临界点附近的性态和整个流形的拓扑之间有深刻的联系. 回忆给定一个光滑函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, 那么 $p \in M$ 是临界点当且仅当 $df|_p = 0$, 也就是 f 在 p 处的全体一阶导数均退化. 此时我们可以进一步探测 f 在临界点处的性质: 即去考察 f 在 p 处的二阶微分结果. 我们先考虑 M 是 \mathbb{R}^n 中一个开集的情形, 此时 f 对应的 **Hessian** 矩阵

$$H_f(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_p \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

描述了 f 在 p 处的所有二阶性态. 我们可将 $H_f(p)$ 视为一个关于 p 处切空间的二次型:

$$H_f(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_p \cdot v_i v_j.$$

¹ 详见 John Lee, *Introduction to Complex Manifolds*, 第 10 章.

对一般的 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, 我们也可以在每点处的切空间上定义二次型 $H_f(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, 为此我们需要证明有如下交换性成立:

$$\begin{array}{ccc}
 & T_p M & \\
 d\varphi_1 \swarrow & & \searrow d\varphi_2 \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d(\varphi_2 \varphi_1^{-1})} & \mathbb{R}^n \\
 H_f(\varphi_1(p)) \searrow & & \downarrow H_f(\varphi_2(p)) \\
 & \mathbb{R} &
 \end{array}$$

这是因为

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_\ell} \right|_{\varphi_1(p)} &= \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ (\varphi_2 \varphi_1^{-1}) \frac{\partial x_i}{\partial y_\ell} \right) \Big|_{\varphi_1(p)} \\
 &= \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\varphi_2(p)} \frac{\partial x_j}{\partial y_k} \Big|_{\varphi_1(p)} \frac{\partial x_i}{\partial y_\ell} \Big|_{\varphi_1(p)} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\varphi_2(p)} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_k \partial y_\ell} \Big|_{\varphi_1(p)} \right) \\
 &= \sum_{i,j} \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\varphi_2(p)} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \Big|_{\varphi_1(p)} \frac{\partial x_j}{\partial y_\ell} \Big|_{\varphi_1(p)}.
 \end{aligned}$$

于是在 Hessian 矩阵层面上

$$H_f(\varphi_1(p)) = \text{Jac}_{\varphi_2 \varphi_1^{-1}}(\varphi_1(p))^t H_f(\varphi_2(p)) \text{Jac}_{\varphi_2 \varphi_1^{-1}}(\varphi_1(p)).$$

因此可以良定义二次型 $H_f(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Morse 理论主要研究 $H_f(p)$ 非退化的情形, 此时我们称 p 是一个**非退化点**. (注意, 这样说的前提是 p 为临界点) 根据线性代数理论, 非退化二次型在一组基下形如

$$H_f(p) \sim \begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}, H_f(p)(x) = -x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_n^2.$$

由此得到的 r 是在差一个合同变换下的矩阵不变量, 或者说是仅关于二次型本身的量. 它可被解释为作为矩阵的负特征值个数, 或者作为二次型的最大恒正线性子空间的维数. 在流形的语言中, 它是一个与坐标卡选取无关的量, 我们将 r 称为 f 在 p 处的**指标**. 在几何上, r 可以解释为使 f 递减的最大线性无关方向个数: 这是因为在这些方向上 f 的一阶导数为零而二阶导数为负.

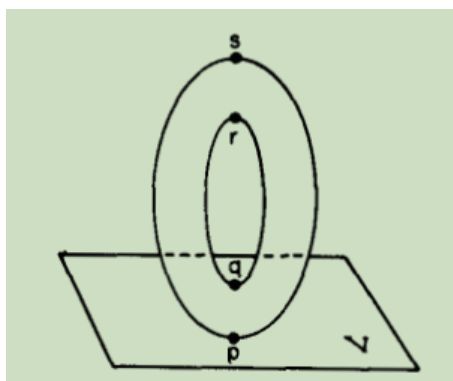
相比前文映射在某点处的秩, 指标的一个好性质是它永远是一个稳定量. 比如对正定形式 $H_f(p)(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, 如果 q 足够接近点 p , 那么也会导致正定性:

$$\begin{aligned}
 H_f(q)(x) &\geq (1 - \varepsilon)(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - \varepsilon \sum_{i \neq j} |x_i x_j| \\
 &\geq (1 - (n+1)\varepsilon)(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + \varepsilon(n(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2) > 0
 \end{aligned}$$

当 ε 足够小时对任意非零的 x 恒成立. 从而对一般的非退化二次型 $H_f(p)$, 其附近的二次型正定空间和负定空间的维数都与它保持一致, 从而拥有相同的指标和相同的标准型.

令人惊讶的是, 流形在非退化点附近的性态和流形所对应的同伦等价类高度相关. 我们有如下 (似乎在 Morse 理论众多书籍中都有的经典) 例子:

Example 1.4.24. 如图考虑一个竖直坐落在 \mathbb{R}^3 中的环面:



考虑 $f: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是高度函数. 则图中 p, q, r, s 四个点为非退化的临界点, 根据几何意义容易判断它们对应的指标分别为 $0, 1, 1, 2$.

而另一方面, 我们逐步考察 $f^{-1}((-\infty, c))$.

- 当 $p < c < q$ 时, $f^{-1}((-\infty, c))$ 形如一个圆盘, 它同伦等价于一个 0 维胞腔.
(0 维胞腔同胚于 D^0)
- 当 $q < c < r$ 时, $f^{-1}((-\infty, c))$ 形如一个无底圆柱, 一开始的圆盘可等价为侧面上的一点. 由于圆柱同伦等价于 S^1 , 我们可将其同伦等价为在刚刚的 0 维胞腔上黏贴一个 1 维胞腔 (1 维胞腔同胚于 D^1).
- 当 $r < c < s$ 时, $f^{-1}((-\infty, c))$ 形如环面去掉一个圆盘, 它的同伦类为 T^2 挖去一点, 从而同伦等价于 $S^1 \vee S^1$, 它即是上一步的 S^1 再黏贴上一个 1 维胞腔.
- 当 $c > s$ 时, $f^{-1}((-\infty, c))$ 就是整个环面, 它所在的同伦类可视为在上一步的 $S^1 \vee S^1$ 上黏贴一个 2 维胞腔.

如下一个引理和两个定理就描述了非退化点对流形的影响:

Lemma 1.4.25 (Morse 引理). 设 p 是关于 f 的指标 k 非退化点, 那么存在 p 附近的局部坐标卡 $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $f \circ \varphi^{-1}$ 形如

$$f \circ \varphi^{-1}(x) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2.$$

特别地, 存在 p 的邻域内仅有 p 一个临界点, 于是全体非退化临界点构成离散集.

Theorem 1.4.26. 设 f 是 M 上的光滑函数, $M_c = f^{-1}([-\infty, c])$. 如果 $f^{-1}([a, b])$ 是 M 的紧子集且不含任何临界点, 则 $f^{-1}([a, b])$ 微分同胚于 $f^{-1}(a) \times [a, b]$ 且该同胚保持在 f 下的取值不变. 特别地, M_a 和 M_b 拥有相同的同伦类.

Theorem 1.4.27. 设 f 是 M 上的光滑函数, 如果 $f^{-1}([a, b])$ 是紧集并且其内部恰含一个指标 k 临界点, 则存在一个 k 维胞腔 $e^k \subset f^{-1}([a, b])$ 使得 $e^k \cong D^k$, $e^k \cap f^{-1}(a) = \partial e^k$, 并且 M_a 可以形变收缩为 $M_b \cup e^k$.

我们简要陈述这些命题的证明.

Proof for 1.4.25. 通过任取一个局部坐标, 我们不妨设一开始 U 就是 \mathbb{R}^n 中以原点为中心的小开球, 并且 $f(0) = 0$. 则此时

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(0) = \sum_{i=0}^n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{tx} dt \cdot x_i \\ &= \int_{i,j=0}^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{stx} ds dt \cdot x_i x_j. \end{aligned}$$

为每个 $x \in U$, 记

$$B(x) = \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{stx} ds dt \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

则 $B(x)$ 是关于 x 的光滑矩阵值函数. 现在把 x 视为列向量, 则 $f(x) = x^t B(x) x$ 并且 $B(0) = H_f(0)$. 我们的目标是在零点附近找到一个微分同胚 $\Phi: U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$, 使得

$$f \circ \Phi^{-1}(y) = y^t \cdot \begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \cdot y, \quad \forall y \in \Phi(U_\varepsilon).$$

我们发现如果 $\Phi(x) = A(x) \cdot x$, 那么就有

$$f \circ \Phi^{-1}(y) = f(A(\Phi^{-1}(y))y) = y^t \cdot (A^{-1}(\Phi^{-1}(y)))^t B(\Phi^{-1}(y)) (A^{-1}(\Phi^{-1}(y))) \cdot y.$$

于是我们希望取 $A(x)$ 使得 $A^{-1}(x)^t B(x) A(x) = \begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ 恒成立, 换言之对一块小邻域内的 x 同时对角化.

首先根据指标的非退化性, 存在一个零点附近的邻域内所有 $B(x)$ 对应的指标均为 r . 于是的确存在矩阵 $Q(x)$ 使得

$$Q(x)^t \cdot B(x) \cdot Q(x) = \begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

我们能利用 $B(x)$ 的各个分量来具体表示出 $Q(x)$, 回忆线性代数中二次型的对角化过程其实就是配方与换元的过程, 比如说

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = (\sqrt{a_{11}}x_1 + \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}x_2)^2 + (\sqrt{a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}}x_2)^2$$

那么就可以做变量替换, 系数矩阵就是上面所求的 Q . 这里展示的开根系数均正时的情形. 根据非退化时指标的稳定性在一个邻域内开根所涉及的项符号不会发生改变, 因此在这个邻域内 Q 的表达式光滑依赖于矩阵 B . 所以, 如果取

$$\Phi(x) = Q(x)^{-1} \cdot x,$$

那么 Φ 是关于 x 的光滑映射, 并且在 0 点处


$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{x=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{Q(\lambda e_i)^{-1} \cdot \lambda e_i}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (Q(\lambda e_i)^{-1})_i = (Q(0)^{-1})_i.$$

其中 e_i 指代恰好第 i 个分量为 1 的单位向量, 矩阵下标 i 指的是矩阵的第 i 列. 根据非退化性易知在 $Q(0)$ 是非退化矩阵, 由此可知 $d\Phi$ 在 0 处是线性同构, 所以 Φ 在 0 附近给出局部微分同胚. 这就得到了满足 Morse 引理的坐标卡, 证毕. \square

Sketch of Proof 1.4.26. 该命题的证明会利用到向量场的相关概念，这超出了该讲义的范围，但却是容易理解的，感兴趣者可以参考相关教材.² 对任何光滑流形 M ，利用单位分解容易为其赋予一个 Riemann 度量. (切空间上的内积). 这样在远离临界点处，我们可用内积把线性函数 $df|_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ 对应到切空间上一个向量，即定义 $\nabla f|_p$ 满足

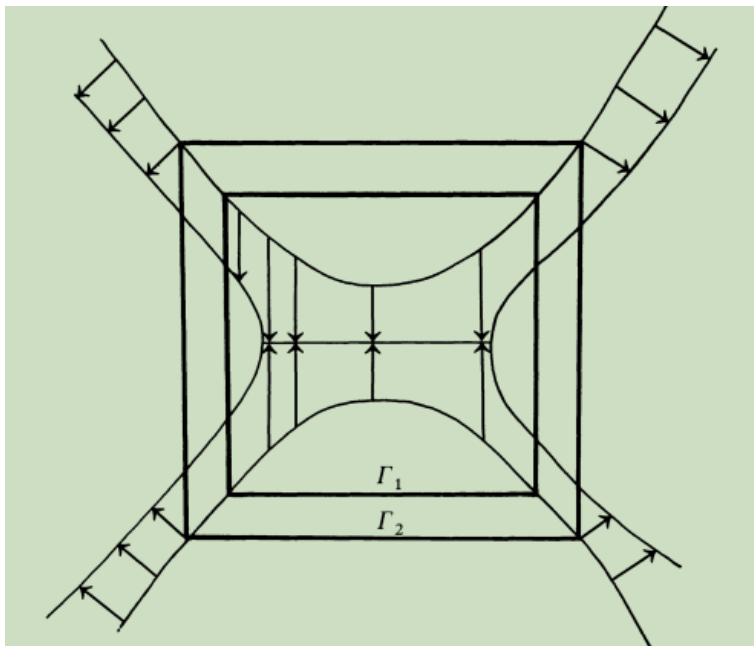
$$\langle \nabla f|_p, v \rangle = df|_p(v).$$

则 ∇f 给出 $f^{-1}([a, b])$ 上的一个处处非零的光滑向量场 (这是基于无临界点性质)，于是诱导出一个单位向量场. 这一向量场给出一个流，我们可以让 $f^{-1}(a)$ 从 a 时刻起沿着这个流匀速上升到 $f^{-1}(b)$ ，那么在 t 时刻就恰好上升到 $f^{-1}(t)$. 这就给出保 f 取值的微分同胚 $F : f^{-1}(a) \times [a, b] \rightarrow f^{-1}([a, b])$:

- 单射性是基于流的性质得到，再说的清楚些即是由于常微分方程解的存在唯一性：如果两条流汇聚在某点，那么其中某一条会包含另一条. 又根据向量场上没有奇点，因此在任意点在局部上都位于某个流中，然后通过 $[a, b]$ 的紧性可以把流延拓到两端边界上，这就说明了满性.
- 浸入性是因为流所指的切向和水平集 $f^{-1}(t)$ 在 M 中张出的切空间在度量下正交，特别地并不落在水平集中. 于是在每点处 dF 给出切空间之间的线性同构.
- 最后的整体同胚性根据条件 $f^{-1}([a, b])$ 是紧集以及 1.3.21 得到. 

Sketch of Proof 1.4.27. 简单来说，这是 Morse 引理导致局部性质唯一确定所直接导致的结果. 根据上一个定理 1.4.26，设唯一的临界值为 c ，则我们只需要对某个足够小的 ε 考虑 $M_{c-\varepsilon}$ 和 $M_{c+\varepsilon}$ 之间的关系. 我们可以选择 p 附近的一个满足 Morse 引理的坐标卡，然后取小的 ε 使得 $f^{-1}(c+\varepsilon)$ 和 $f^{-1}(c-\varepsilon)$ 都和 U 相交，这样变化都发生在该坐标卡以内. 则在坐标卡附近的形态形如下图：

²除了经典的 J.Milnor, *Morse Theory* 之外，W.Hirsch, *Differential Topology*, GTM33 的 6.2 节也对此有叙述.



左右两瓣双曲线以内的区域都属于 $M_{c-\varepsilon}$, 上下两瓣双曲线以外的区域都属于 $M_{c+\varepsilon}$:

$$M_{c-\varepsilon} \cap U = \{x : -x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2 \leq -\varepsilon\};$$

$$M_{c+\varepsilon} \cap U = \{x : -x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2 \leq \varepsilon\}.$$

我们先在内侧和外侧钦定形变收缩, 然后再延拓到中间区域上. 具体而言, 在 Γ_1 内, 注意到如果我们在前 k 个分量上投影, $M_{c-\varepsilon} \cap U$ 投影结果落在 $x_1^2 + \cdots + x_k^2 \geq \varepsilon$ 外侧, 而 $M_{c+\varepsilon} \cap U$ 的投影覆盖了整个 k 维平面, 因此经过垂直投影, 可以把 $\Gamma_1 \cap M_{c+\varepsilon}$ 形变收缩到 $(\Gamma_1 \cap M_{c-\varepsilon}) \cup e^k$, 其中 e^k 为圆盘 $x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq \varepsilon$. 而在 Γ_2 外部, 我们通过向量场 ∇f 把 $M_{c+\varepsilon} - \Gamma_2$ 形变收缩到 $M_{c-\varepsilon} - \Gamma_2$ 上. 最后在两个区域之内完成技术性的过渡将两个向量场连接起来即可. \square

有了上述两个引理之后, 考虑下述函数来研究流形的整体性态就变得十分自然:

Definition 1.4.28 (Morse 函数). 如果光滑函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 满足任何临界点都是非退化的, 那么称其为 **Morse 函数**.

若 M 是紧流形, 则 $f(M)$ 是 \mathbb{R} 中的紧集, 从而 f 在 M 中存在取最大最小值的两点. (我们不考虑平凡的常值函数情况, 它一定不给出 Morse 函数.) 我们在数学分析中知道在欧氏空间中极值点都满足 $df = 0$, 所以这两点都是 M 中的临界点. 又因为在任意方向上函数值都减小/上升, 于是这两点的指标分别为 n 和 0 . 下面的命题描述了这种临界情况:

Theorem 1.4.29 (Reeb). 设 M 是 n 维光滑闭流形. 如果存在一个 Morse 函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 恰含两个临界点, 则 M 同胚 (注意, 不是微分同胚) 于球面 S^n .

Sketch of Proof 1.4.29. 我们已经知道两个临界点的指标分别为 0 和 n , 将它们记为 S 和 N . 那么根据 Morse 引理, 在 S, N 附近分别存在一个邻域, 使得 f 在其上形如

$$f(x) = \pm(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

也就是说对足够小的 $\varepsilon > 0$, $f(S) + \varepsilon$ 和 $f(N) - \varepsilon$ 的原像集都微分同胚于 S^{n-1} . 现在根据定理 1.4.26, 由于 $f(S) + \varepsilon$ 和 $f(N) - \varepsilon$ 之间没有临界值, 所以有微分同胚

$$f^{-1}([f(S) + \varepsilon, f(N) - \varepsilon]) \cong f^{-1}(f(S) + \varepsilon) \times I \cong S^{n-1} \times I.$$

根据水平集划分, M 被分为三个部分 A^-, A, A^+ , 它们分别微分同胚于 $D^n, S^{n-1} \times I$ 和 S^n , 并且在边界上都微分同胚于 S^{n-1} . 但是我们不能保证整体的到 S^n 的微分同胚性成立: 我们可以在一端比如说先把 A^- 微分同胚到球面底部, 这诱导出边界上的微分同胚 $\Phi: f^{-1}(f(S) + \varepsilon) \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$, 这可被延拓为

$$\tilde{\Phi}: A \xrightarrow{\sim} f^{-1}(f(S) + \varepsilon) \times I \xrightarrow{\Phi \times \text{id}} S^{n-1} \times I.$$

但是 $\tilde{\Phi}$ 所诱导出的 $f^{-1}(f(N) - \varepsilon) \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$ 可能并不能延拓为 $A^+ \rightarrow D^n$ 的微分同胚, 这是因为 $\tilde{\Phi}$ 所给出的传导过程可能导致“扭曲”, 进而无法和原本资料里的 $A^+ \rightarrow D^n$ 相容.

但好在这件事情在连续范畴中总能办到: 即对任意边界自同胚 $f: \partial D^n \rightarrow \partial D^n$, 它总能连续延拓为 $D^n \rightarrow D^n$ 的自同胚, 直接利用线性延拓

$$\tilde{f}: D^n \rightarrow D^n, \quad f(x) = \begin{cases} |x| \cdot f\left(\frac{x}{|x|}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

即可 (我们容易看出这大概率不是一个光滑同胚, 但只要去掉极值点就能给出一个光滑同胚, 所以其实差的并不远). 这就得到了从 f 到 S^n 的拓扑同胚. \square

为了由刚刚建构的 Morse 理论获取流形的整体性质, 我们需要证明 Morse 函数的存在性. **Sard 定理** 提供了最后一块拼图.

Lemma 1.4.30. 设 U 是 \mathbb{R}^n 中的开集, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑函数. 则对几乎所有 $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$f_a(x) = f(x) + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

是 U 上的 Morse 函数.

Proof. 考虑光滑映射

$$\begin{aligned} g_a: U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(x) &= \left(\frac{\partial f_a}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_a}{\partial x_n} \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) + (a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

则 x 是 f_a 的临界点当且仅当 $g_a(x) = 0$, 即 $g_0(x) = g_a(x) - a = -a$. x 是 f_a 的非退化临界点当且仅当 $g_0(x) = -a$ 且 $dg_a|_x$ 非退化, 这等价于 $dg_0|_x$ 非退化.

f_a 是 Morse 函数等价于所有临界点都是非退化的, 也就是只要 $g_0(x) = -a$ 就有 $dg_0|_x$ 非退化, 这即是说 $-a$ 为 g_0 的正则值. 根据 Sard 定理 1.4.3, 几乎所有值都是正则值, 于是几乎所有 a 都使得 f_a 是 Morse 函数. $\left\langle \begin{smallmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{smallmatrix} \right\rangle$

Proposition 1.4.31 (Morse 函数存在). 对任意光滑流形 M , 存在 M 上的 Morse 函数.

Proof. 根据 Whitney 嵌入定理 1.4.14, 存在嵌入 $\iota: M \rightarrow \mathbb{R}^N$. 现在我们可以借助 \mathbb{R}^N 上的坐标函数 $\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_N$, 事实上可以证明:

对几乎所有 $a \in \mathbb{R}^N$, $f_a(x) = a_1\iota_1(x) + \dots + a_N\iota_N(x)$ 都是 M 上的 Morse 函数.

对任意 $p \in M$, $d\iota|_x: T_pM \rightarrow \mathbb{R}^N$ 是单同态. 因此存在 n 个分量 i_1, \dots, i_n 使得

$$M \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^N \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (\iota_{i_1}(x), \dots, \iota_{i_n}(x))$$

在 p 处诱导出切空间上的线性同构, 因此在 p 的邻域 N_p 上给出局部同胚. 对任意 $x \in N_p$, x 是 f 的临界点/非退化点当且仅当 $(\iota_{i_1}(x), \dots, \iota_{i_n}(x))$ 是 $\pi(\iota(N_p)) \subset \mathbb{R}^n$ 在相应映射下的临界点/非退化点.

现在固定 a_{i_1}, \dots, a_{i_n} 以外的所有值 (将它们构成坐标称为 b), 设 $f_a(x) = g_b(x) + a_{i_1}\iota_{i_1}(x) + \dots + a_{i_n}\iota_{i_n}(x)$, 则对 $\pi(\iota(N_p))$ 中的点来说, f_a 就形如 $g_b + a_{i_1}x_1 + \dots + a_{i_n}x_n$, x_i 是向第 i 个分量的投影. 根据上一个引理的结论, 对几乎所有的 $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ 均有 f_a 是 $\pi(\iota(N_p))$ 上的 Morse 函数, 从而也是 N_p 上的 Morse 函数. 回忆在 Sard 定理证明中我们使用过 Fubini 定理, 它告诉我们如果一个 \mathbb{R}^N 中的集合在所有水平集上都是相应维数的零测集, 则该集合是 \mathbb{R}^N 中的零测集, 即

$$\begin{aligned} & m(a: f_a \text{ 在 } N_p \text{ 上不是 Morse 函数}) \\ &= \int_{\mathbb{R}_b^{N-n}} m((a_{i_1}, \dots, a_{i_n}): g_b + a_{i_1}\iota_{i_1} + \dots + a_{i_n}\iota_{i_n} \text{ 在 } N_p \text{ 上不是 Morse 函数}) db \\ &= 0. \end{aligned}$$


由于 M 是第二可数的, 因此存在可数个坐标卡 N_p 能覆盖整个 M . 而我们知道可数个零测集的并仍然是零测集, 因此使得 f_a 在 M 上不是 Morse 函数的 a 构成零测集. 特别地, 在整个 M 上定义的 Morse 函数存在. $\left\langle \begin{smallmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{smallmatrix} \right\rangle$

Remark. 事实上有如下更强结论: Morse 函数构成 $C^\infty(M; \mathbb{R})$ 上的稠密开集, 也就是说我们可以选择任意靠近某个光滑函数的 Morse 函数. 该命题证明需要用到其它技术性结果, 我们略去.

经过微扰, 我们可以得到形态足够好的 Morse 函数:

Proposition 1.4.32. 对任意紧流形 M , 存在 Morse 函数使得每个临界值的原像中恰含有一个 (非退化) 临界点.


Proof. 首先根据上个命题, 我们先选取任意一个 Morse 函数 f . 根据 Morse 引理 1.4.25, 全体临界点构成离散集, 分别记为 p_1, \dots, p_t .

我们能在每个 p_i 附近选择一个满足 Morse 引理的邻域 U_i , 并使得这些 U_i 两两不交; 然后选择在 p_i 附近更小邻域 V_i 上恒为 1 且支在 U_i 上的光滑截断函数 ψ_i . 现在考虑函数 $f_a = f + \sum a_i \psi_i$. 首先只有圆环 $\bigcup_i (\overline{U_i} - V_i)$ 内的点对应的微分映射可能发生改变. 而这些点原本对应的微分映射都是非退化的, 因此对足够小的 a 我们仍然可以保证这些圆环上的点关于 f_a 仍是非退化点. 于是非退化点仍然只有 p_1, \dots, p_k , 但是 $f_a(p_i)$ 被微扰为了 $f(p_i) + a_i$. 我们当然可以适当选取足够小的 a_i 使得 $f(p_i) + a_i$ 两两不同, 这样这些点就输出不同的临界值. 

现在可以证明如下的重要结论:

Theorem 1.4.33. 任意 n 维紧流形都同伦等价于一个至多 n 维有限 CW 复形. (该结论对非紧流形也对. 所谓 CW 复形, 直观上来讲就是通过维数递增的胞腔 (同胚于 D^n 的空间) 逐步粘合而成的拓扑空间, 对一般的拓扑空间, 只有弱同伦等价性成立.)

Proof. 我们选取一个使临界值的原像中恰含有一个临界点的 Morse 函数. 由于 M 是紧流形, 取到最小值的点都是非退化临界点, 因此构成一个离散集, 也就是说存在某个 c 使得 $f^{-1}((-\infty, c])$ 是一些 0 维胞腔.

现在就可以分别利用 1.4.26 和 1.4.27, 每经过一个临界值, 都恰好对应一个临界点, 对应同伦类黏贴上某个 $k \leq n$ 维胞腔 (我们这里略去了一些细节. 直观上如果 X_{i+1} 能形变收缩到 $X_i \cup e^k$, 那么当 X_i 进一步形变收缩到 X_{i-1} 中时, 这个胞腔 e^k 的边界也随之移动到 X_{i-1} 中, 于是最终我们可以只保留骨架), 直到得到整个流形 M 对应的同伦类. 如果最后得到的胞腔复形有小维数胞腔黏贴在大维数胞腔上, 我们可以通过胞腔逼近让它在不变同伦类的情形下形变到对应维数的骨架内. 这样的过程至多进行有限次, 最终会得到一个有限 CW 复形. 

上述命题本质上建立起了分析 (二阶偏导数性质), 几何 (流形), 组合 (胞腔复形) 之间的联系. 我们可以看到, 上述命题实际上还建立起了各阶指标的非退化点个数和各阶维数的胞腔个数之间的联系, 后者虽然是一个组合量, 但在胞腔复形的理论中又可以和拓扑不变量——流形对应的 **同调群维数** 联系起来, 从而给出 **Morse 不等式**, 它允许我们通过 Morse 函数来得到关于流形的同调群信息, 特别地还可以用来计算 **Euler 示性数**. 比如一个亏格 g 的连通闭曲面如果垂直地放在桌面上, 那么高度函数会给出 1 个指标 0 临界点, $2g$ 个指标 1 临界点和 1 个指标 2 临界点, 于是就得到 $\chi(\Sigma_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$. 我们甚至可以从这些临界点出发来建立一个同调理论, 称为 **Morse 同调**, 它也满足各条同调公理……关于 Morse 理论的更多内容, 这里不再赘述.

1.4.4 带边流形与 Brouwer 不动点定理

我们先介绍带边流形的概念. 我们有很多引入带边流形的动机, 比如说在研究积分理论时, 我们要对一个图形内部和边界上的积分作一个对应. 从几何上看, 我们常说的流形总有种满足“自封闭性”的味道, 每个点附近的所有点都还是在流形中. 但我们有时也会讨论诸如实心球, 实心圆盘, 或者一个曲面挖去一个开圆盘这种图形, 它们同样具有足够好的性质. 上述的这些图形的都是紧的, 但是其内部都是非紧的并且构成一个通常所说的流形. 除此之外, 其边界也会构成一个低维数的流形.

Definition 1.4.34 (带边流形). 称 M 是一个带边拓扑流形, 如果 M 是第二可数的 Hausdorff 空间, 并且在每点附近都存在一个开邻域同胚于欧氏空间 \mathbb{R}^n 或者上半欧氏空间 $\mathbb{H}^n := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. 如果 x 满足存在一个局部同胚 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{H}^n$ 使得 $\varphi(x) \in \partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n = 0\}$, 那么称 x 为 M 的一个边界点. 全体边界点构成集合记为 ∂M .

类似光滑流形的定义, 所有局部同胚 $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ or \mathbb{H}^n 给出一些坐标卡集. 相容坐标卡的定义仍然是使得 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ 在相交区域内是光滑映射 (这里有一些问题: 一个 $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的光滑映射说的是它是上半空间的一个开邻域上的光滑映射的限制) 的两个坐标卡, 由此给出光滑图册和等价性的概念. 光滑结构指光滑图册的等价类, 赋予了光滑结构的带边拓扑流形被称为光滑带边流形.

Lemma 1.4.35. \mathbb{R}^n 中任意开集 U 和 \mathbb{H}^n 中包含边界点的任意开集 V 在拓扑意义下不同胚.

Proof. 任取一个边界点 x , 若有同胚 $\Phi: V \rightarrow U$, 则有相对同调群之间的同构

$$0 \cong H_n(V, V - x) \rightarrow H_n(U, U - \Phi(x)) \cong \mathbb{Z}.$$

矛盾.



根据上述结论, 如果一个点在某个坐标卡映射下成为了上半空间的边界点, 那么在它附近的任何坐标卡映射都会把它同胚到上半空间的边界点. 而对剩下的点来说, 总存在它附近的一个坐标卡同胚于 \mathbb{R}^n , 于是所谓“边界点”和“内点”的定义是分离的.

Proposition 1.4.36. 对 n 维带边流形 M , 它的全体内点 $M - \partial M$ 构成 n 维光滑流形, 全体边界点 ∂M 构成 $n - 1$ 维光滑流形.

Remark. 需要特别强调的是, ∂M 的定义是内蕴的, 可以直观想象为所有坐标卡映射引出的边界之并. 而单独选定一个拓扑空间 X , 我们不能谈论它的边界. 只有在 X 成为某个 Y 的子空间时, 我们把 $\overline{X} - \text{Int } X$ 称为 X 的边界, 并且不同的嵌入方式会导致边界的定义不同 (比如作为低维空间嵌入时, 其边界就是自身).

值得一提的是, 在多复变中我们经常应用的上半空间定义为 $\mathbb{H}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : \text{Im } z_n > 0\}$. 类似单复变中的上半平面空间, 它和 \mathbb{C}^n 之间不存在解析同胚. (但是存

在微分同胚) 它可以与单位球这种有界域通过所谓 Cayley 映射建立解析同胚, 但是在实际运用中更便于计算. (一个例子是双曲几何中上半平面模型给出的度量 $\frac{dz}{|\operatorname{Im} z|}$ 相比圆盘模型的 $\frac{2dz}{1-|z|^2}$ 更简单)

对带边流形我们也可以在边界上讨论切空间. 虽然在局部上对应的是 n 维半空间, 但是我们仍然有 n 个线性无关的方向, 从而仍然可定义一个 n 维的切空间. (这里最简单地看法还是抽象的导子定义 1.2.7, 如果运用几何看法, 我们会发现沿垂直于超平面方向远离 x 和靠近 x 分别给出正负两个方向的切向量, 因此最后产生的切空间还是线性空间而不是半空间.) 将 ∂M 作为流形所给出的 $n-1$ 维切空间可以被视为这个 n 维切空间的子空间.

带边流形可以在边界上给出所谓**诱导定向**的概念. 诱导定向对体积形式定义最为方便, 不过我们也可以使用标架的定义来展现这一点. 我们只需要考虑如何从半平面上的标架类 E 诱导出 $n-1$ 维超平面上的标架类. 想法是反过来应用之前法向量的想法, 我们在超平面上选择一个对应于 E 的标架, 使得其**第一个分量外指**, 剩下的分量均落在超平面内, 去掉第一个分量之后所得的 $n-1$ 维标架 E' 就在差一个标架类的意义下是确定的, 这就给出了边界上的**诱导定向**, 我们容易验证其定义是和坐标卡选取无关的, 所以是局部相容的, 从而给出了 ∂M 的一个定向. 注意这里“外指”是良定义的, 因为上半空间都包含在流形内, 因此“垂直于超平面向下指”的向量是典范的外指法向量.

在实际应用中, 比如在数学分析里我们经常考虑平面上和空间内一个区域在边界上的诱导定向以确定积分的符号. 用“第一个分量外指”的原则就很容易确定定向, 比如对三维区域, 我们可想象有一个标准正交标架在区域内随意平移移动, 然后在边界上通过一个刚体变换把法向量外指, 剩下的两个分量给出的标架就给出曲面定向.

Remark. 这个概念在拓扑中是通过相对同调长正合列所给出的边界同态

$$H_n(M, \partial M) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial M)$$

所定义的, 我们可以验证这是一个同构. 与一般流形不同, 带边流形的基本类是 $H_n(M, \partial M)$ 的代表元, 这是因为我们本质是考虑 $A = M - \partial M$ 上的截面, 它与 $H_n(M, M - A)$ 之间有个对应. 我们就把带边流形基本类在边界同态下的像称作在边界上的诱导定向.

即使诱导定向有拓扑上的定义, 在实际运用中我们更青睐使用微分拓扑定义来提供直观, 比如考虑胞腔复形时, 每个胞腔上的定向就可以用标准标架来表示, 然后我们可以容易将其定向和边界上的诱导定向推出到拓扑空间中并将其可视化.

我们曾在正则水平集定理 1.3.24 中使用正则值的原像集构建了很多光滑子流形. 对带边流形而言, 也有类似的命题成立.

Lemma 1.4.37. 设 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑函数, 若 0 是 f 的正则值, 则 $f^{-1}([0, +\infty))$ 是带边流形, 其边界为 $f^{-1}(0)$.

Proof. 对任意 $p \in f^{-1}((0, +\infty))$, 存在其开邻域内所有点的值仍落在 $(0, +\infty)$ 中, 因此在它附近可以直接用 M 的坐标卡作为其坐标卡映射.

考虑 $p \in f^{-1}(0)$ 的情形. 正则水平集定理已经告诉我们 $f^{-1}(0)$ 在 p 附近是一个 $n-1$ 维子流形, 因此存在一个 p 附近的局部坐标卡 $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $\varphi(f^{-1}(0) \cap U) = \mathbb{R}^{n-1} \cap V$. 我们就这样把 p 的邻域等同到欧氏空间中. 由于 $df|_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ 是淹没, 因此关于最后一个分量的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_n}|_p \neq 0$. 如果 $\frac{\partial f}{\partial x_n}|_p > 0$, 那么 p 的一个小邻域与上半空间的交在 f 下的像均为正值, 反之则与下半空间的交在 f 下的像均为正值. 于是存在 p 附近的同胚于上半空间的邻域, 这就说明了 $f^{-1}(0)$ 是 $f^{-1}([0, +\infty))$ 的边界. \square

Proposition 1.4.38 (带边流形水平集定理). 设 $f: M \rightarrow N$ 是 m 维流形到 n 维流形的光滑映射, $y \in N$ 同时是关于 f 和 $f|_{\partial M}$ 的正则值. 则 $f^{-1}(y)$ 是一个 $m-n$ 维带边流形, 且 $\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M$.

Proof. 对 $p \in f^{-1}(y) \cap (M - \partial M)$, 根据一般的水平集定理即可知 $f^{-1}(y)$ 在 p 附近是 $m-n$ 维子流形. 我们只需考虑 $p \in f^{-1}(y) \cap \partial M$ 时的情形. 通过选择局部坐标卡, 我们可不妨设 $f: \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 并且 $p \in \partial \mathbb{H}^m$. 首先利用光滑 Tietze 扩张定理可将 f 扩张为 $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的光滑映射 \tilde{f} , 并且在上半空间上和原先的 f 等同. 由于 $d\tilde{f}|_p = df|_p$, 因此 \tilde{f} 在 p 处是淹没, 于是 $\tilde{f}^{-1}(y)$ 在 p 的邻域 N_p 内为 $m-n$ 维子流形. 但

$$f^{-1}(y) \cap N_p = (\tilde{f}^{-1}(y) \cap N_p) \cap \{x: x_m \geq 0\}.$$

换言之考虑 $\pi: (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_m$, 则 $f^{-1}(y) \cap N_p = \pi|_{\tilde{f}^{-1}(y) \cap N_p}^{-1}([0, +\infty))$.

我们证明 0 是上述映射的正则值. 这是因为对任意 $q \in \pi|_{\tilde{f}^{-1}(y) \cap N_p}^{-1}(0)$ 均有

$$T_q(\tilde{f}^{-1}(y)) = \ker df, T_q(\tilde{f}^{-1}(y)) \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}) = T_q(\tilde{f}^{-1}(y) \cap \partial \mathbb{H}^m) = \ker df|_{\partial \mathbb{H}^m}.$$

而根据条件, df 和 $df|_{\partial \mathbb{H}^m}$ 都是满同态, 因此它们的维数分别是 $m-n$ 和 $m-n-1$. 于是 $T_q(\tilde{f}^{-1}(y))$ 中存在最后一个分量非零的向量, 从而 $d\pi: T_q(\tilde{f}^{-1}(y)) \rightarrow \mathbb{R}$ 不是零映射, 因此 q 是正则点, 0 是正则值.

利用上一个引理即可知 $f^{-1}(y) \cap N_p$ 是 p 附近的 $m-n$ 维带边流形, 且 p 落在边界上. 这就说明了整个 $f^{-1}(y)$ 是带边流形, 并且其边界为 $f^{-1}(y) \cap \partial M$. 证毕. \square


上述命题可以用来推出一个有关不动点的命题, 其证明用到一维流形的分类, 我们承认该命题的正确性.

Proposition 1.4.39. 对任意带边紧光滑流形 M , 不存在光滑映射 $f: M \rightarrow \partial M$ 使得 $f|_{\partial M} = \text{id}$.

Proof. 假设这样的光滑映射存在. 由 Sard 定理 1.4.3, 存在关于 f 和 $f|_{\partial M}$ 的正则值 $y \in \partial M$. 根据带边流形水平集定理, 由于 $\text{codim } \partial M = 1$, 因此 $f^{-1}(y)$ 是 M 中

的一维带边流形. 但是一维带边紧流形必定由有限个圈和有限个线段构成, 而一条线段有两个端点, 从而 $\# \partial f^{-1}(y)$ 是一个偶数. 但是

$$\partial f^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap \partial M = \{y\} \Rightarrow \# \partial f^{-1}(y) = 1.$$

矛盾, 证毕. 

Remark. 本结论去掉紧性条件后显然不对, 比如存在从上半平面到 x 轴的光滑投影映射. 非紧的光滑流形允许只含有一个端点, 从而在非紧情形下该证明失效.

对连续映射该命题也是成立的. 这是因为边缘同态诱导出同构

$$H_n(M, \partial M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(\partial M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

于是相对同调长正合列可知包含映射 i 所诱导的 $i_* : H_{n-1}(\partial M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{n-1}(M; \mathbb{Z}_2)$ 是零同态. 现在在同调群层面上考虑

$$H_{n-1}(\partial M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow[i_*]{i_*} H_{n-1}(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(\partial M; \mathbb{Z}_2)$$

则 $fi = \text{id} \Rightarrow \text{id}_* = f_* i_* = 0$, 矛盾. 我们能隐约从奇偶性论证和 \mathbb{Z}_2 系数同调的论证看出有关模 2 映射度的一些想法.

万事俱备, 我们来证明下述著名定理:

Theorem 1.4.40 (Brouwer 不动点定理). 任何连续映射 $f : D^n \rightarrow D^n$ 存在不动点.

几乎所有证明方法都会把问题化归为下述命题:

Proposition 1.4.41 (Retraction Theorem). 不存在连续映射 $f : D^n \rightarrow \partial D^n = S^{n-1}$ 使得 $f|_{S^{n-1}} = \text{id}$.

这是因为如果连续映射 $f : D^n \rightarrow D^n$ 无不动点, 则对每个 $x \in D^n$, $\overrightarrow{f(x)x}$ 都诱导出一条射线, 将该射线与 S^{n-1} 的交记为 $g(x)$. 我们容易通过具体写出 g 关于 f 的表达式来说明 g 确实是一个连续映射, 并且当 $x \in S^{n-1}$ 时总有 $g(x) = x$.

这个命题就和我们之前所做的工作关系很大了, 因为 D^n 就是带边光滑流形的一个最基本例子. 所以根据命题 1.4.39, 不存在光滑映射 $f : D^n \rightarrow \partial D^n = S^{n-1}$ 使得 $f|_{S^{n-1}} = \text{id}$. 进而我们可以说明有光滑版本的 Brouwer 不动点定理成立 (同样的, 具体表达式保证了在上一段论证中 f 光滑 $\Rightarrow g$ 光滑.) 剩下的问题就是如何从光滑命题转化为连续命题.

Proof. 对任意连续映射 $f : D^n \rightarrow D^n$, 假设 f 没有不动点. 则根据 D^n 的紧性可知 $\|f(x) - x\|_{D^n}$ 存在非零下界, 记为 δ . 根据 Weierstrass 逼近定理, 对任意 ε 可以取多项式函数 $P_\varepsilon : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得

$$\|P_\varepsilon - f\|_{D^n} \leq \varepsilon.$$

但使用逼近之后像集可能落于 D^n 之外, 我们需要添加一个放缩因子予以修正, 只需考虑 $\frac{1}{1+\varepsilon} \cdot P_\varepsilon$ 即可. 现在我们有

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{1+\varepsilon} P_\varepsilon - f \right\|_{D^n} &\leq \left\| \frac{1}{1+\varepsilon} P_\varepsilon - P_\varepsilon \right\|_{D^n} + \|P_\varepsilon - f\|_{D^n} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \varepsilon \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

而根据光滑版本的 Brouwer 不动点定理, 存在 $x \in D^n$ 使得 $\frac{1}{1+\varepsilon} P_\varepsilon(x)$, 这导致 $|x - f(x)| \leq 2\varepsilon$. 取 $\varepsilon = \delta/3$ 即知矛盾, 证毕. \square

上述证明堪称用微分观点解决问题的典范. 很多代数拓扑中的命题都有微分拓扑中的对应物, 其证明可能更加容易或直观, 并且有可能通过逼近的方式给出连续版本的严格证明. 在建立同调理论或同伦理论后, Brouwer 不动点定理将成为这个体系下的简单应用, 这并不代表微分拓扑的一些观点会被更高级的知识完全取缔, 相反微分拓扑中有关正则值, 映射度和逼近的命题都是理解与计算拓扑量的重要工具.

我们介绍和 Brouwer 不动点定理等价的一些命题.

Proposition 1.4.42. 下述命题两两等价:

- (1) (Brouwer 不动点定理) 任何连续映射 $f: D^n \rightarrow D^n$ 存在不动点.
- (2) (Retraction Thm) 不存在连续映射 $f: D^n \rightarrow \partial D^n = S^{n-1}$ 使得 $f|_{S^{n-1}} = \text{id}$.
- (3) (Homotopy Thm) S^{n-1} 上的恒等映射不是零伦的.
- (4) 若连续映射 $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得 $f|_{S^{n-1}} = \text{id}$, 则 D^n 落在 f 的像集中.
- (5) (介值原理) 设 $v_i: [-1, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 满足 $v_i(x) < 0$ 对任意 $x_i = -1$ 成立, $v_i(x) > 0$ 对任意 $x_i = 1$ 成立. 则存在 $x \in [-1, 1]^n$ 使得 $v_i(x) = 0$ 对每个 i 均成立.
- (6) 若有一些闭集 $B_i \subset [-1, 1]^n$ 分别分离两个 i -面 $\{x: x_i = -1\}$ 和 $\{x_i = 1\}$, 则这些 B_i 的交非空.
- (7) 设 B_0, \dots, B_n 构成标准单形 Δ^n 的一个闭覆盖, 满足第 i 个顶点 $e_i \in B_i$ 并且其对面 $\partial_i e_i \cap B_i = \emptyset$. 则这些 B_i 的交非空.

这些命题各有不同的风格, 各有不同的证明与不同的应用. 最值得一提的是其中的命题 (3), 因为它可以作为著名的 Hopf 映射度定理的推论:

Theorem 1.4.43 (Hopf 映射度定理). $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. 换句话说, 连续映射 $f: S^n \rightarrow S^n$ 的映射度可以唯一决定其同伦类.

现在 S^n 上的恒等映射映射度总为 1, 而零伦映射的映射度总为 0, 于是我们可以通过弱版本的映射度定理 “ $\deg f = 0 \Rightarrow f$ 零伦” 来给出 Brouwer 不动点定理的

证明. 这个命题的证明就更多了, 除了利用标准的同伦切除定理之外, 笔者还已知一个利用单纯逼近与组合想法的容易证明. 由于其证明和本课程差距较大, 这里略去.

另一个值得一提的命题是 (7). 这是因为它和所谓**覆盖维数**的定义有关. 给定一个拓扑空间 X , 称 X 的覆盖维数是 n , 如果对任意 X 的开覆盖 \mathcal{U} , 存在其加细 \mathcal{U}' 使得任何点 $x \in X$ 至多属于 $n+1$ 个 \mathcal{U}' 中的开集. 对一个度量空间而言, n 可定义为最大的使得任意 ε -覆盖都存在某个点被 $n+1$ 个度量球覆盖的数. 这样对标准度量下的 n -单形 Δ^n , 它的覆盖维数就恰好是 n . 我们考虑一些闭度量球对 Δ^n 的覆盖, 不妨设它是有限的. 当 ε 足够小时每个球都会和某个边界 $\partial^i \Delta_n$ 不交, 将其染为第 i 种颜色. 特别地, 我们可以把包含 e_i (从而只包含 e_i) 的度量球都染为 i 色. 这样每种颜色的度量球之并满足条件 (7), 我们可以选择一点落在所有颜色的度量球中, 它至少含于 $n+1$ 个不同的度量球内. 进一步地, 我们可以证明 \mathbb{R}^n 的覆盖维数是 n 并且 n 维流形的覆盖维数也是 n .

我们最后来看一些描述连续映射与光滑映射之间关系的命题. 这里只罗列而不给出证明.

Proposition 1.4.44 (连续函数 Whitney 逼近定理). 设 M 是光滑流形, $A \subset M$ 为闭子集. 对任意在 A 上光滑的连续函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 与任意恒正连续函数 $\delta: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, 存在光滑函数 $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

- 对任意 $p \in A$ 有 $f(p) = g(p)$;
- 对任意 $p \in M$ 有 $|f(p) - g(p)| < \delta(p)$.

注意, 闭集 A 上的光滑函数指的是它是某个 A 的开邻域上的光滑函数在 A 上的限制.

这个命题的证明较为容易, 只需用到单位分解.

Proposition 1.4.45 (连续映射 Whitney 逼近定理). 设 M, N 是光滑流形, $g \in C^0(M, N)$ 是连续映射. 则存在同伦于 g 的光滑映射 $f \in C^\infty(M, N)$. 此外, 若 g 在闭子集 $A \subset M$ 上光滑, 则可以使得 $f|_A = g|_A$.

Proposition 1.4.46 (连续同伦提升为光滑同伦). 设 $f_0, f_1: M \rightarrow N$ 是光滑流形之间的光滑映射. 若 f_0 和 f_1 在拓扑意义下同伦, 则它们也是光滑同伦的.

这两个命题的证明需要用到管状邻域定理, 它们的证明较为复杂, 但是非常清楚地刻画出了连续性和光滑性之间的关系, 使得在讨论同伦不变量时我们可以通过拣取一个与给定连续映射同伦的光滑映射来利用微分拓扑的工具给出定义/证明. 笔者印象中的一个例子是在定义**相交数**时, 需利用所谓横截性才能产生有限交点, 这时候就需要在同伦意义下选取一个满足横截性的映射.